Deutscher Bundestag

Referat Datenbanken,
Programmentwicklung
(ZI 5)
Dr. Wolfgang Mausberg

Bonn, 15. Dezember 1994

Grundzüge der Verfahren zur Berechnung von Anteilen

("Sitzverteilungen")

---

mit dem Vorschlag eines Verfahrens zum
Ausschluß von Mehrdeutigkeiten bei den Berechnungen
nach d´Hondt und nach Sainte Laguë/Schepers

ZI 5 - AP 1994/002

Inhaltsverzeichnis **Seite**

I. Problemstellung

Die Verfahren zur Berechnung von Anteilen (Sitzverteilungen) im Bereich der parlamentarischen Repräsentation dienen dazu, die Vertretung der Beteiligten ("Parteien" im weiteren Sinne) in einer Ausgangsmenge (Ur-Gesamtheit) möglichst verhältnisgleich (proportional) auf eine abgeleitete Menge (Bild-Gesamtheit) abzubilden.

1. Definitionen

Beteiligte ("Parteien"):	B^i	$i = 1, \dots n$
Stärke der Ur-Gesamtheit:	G_u	(ganzzahlig)
Stärken der Ur-Anteile:	$a_u^1, \dots, a_u^n$	(ganzzahlig)

Die Summe der Ur-Anteile ergibt die Ur-Gesamtheit:

$$\sum_{i=1}^{n} a_u^i = G_u$$

Wichtig für das folgende sind die abgeleiteten Größen:

Ur-Verhältnisse:	$a_u^i : a_u^j$	(rationale Zahlen)
Ur-Verhältnisanteile:	$a_u^i : G_u$	(rationale Zahlen)
Stärke der Bild-Gesamtheit:	G_b	
Stärken der Bild-Anteile:	$a_b^1, \dots, a_b^n$	(ganzzahlig, proportional; ideale Werte, die nicht immer existieren, siehe unten)
	$\underline{a}_b^1, \dots, \underline{a}_b^n$	(rationale Zahlen, streng proportional, siehe unten)
	$\bar{a}_b^1, \dots, \bar{a}_b^n$	(ganzzahlig, annähernd proportional, siehe unten)

2. Aufgabe

Die Aufgabe, die mit Hilfe eines Berechnungsverfahrens zu lösen ist, stellt sich mathematisch folgendermaßen dar:
Gewünscht wird ein Satz a_b^i mit den Eigenschaften

a_b^i ganzzahlig für alle $i = 1, \ldots, n$ — Integritätsbedingung

$$\sum_{i=1}^{n} a_b^i = G_b$$

Summenbedingung

$$\frac{a_b^i}{G_b} = \frac{a_u^i}{G_u}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ — Proportionalitätsbedingung

Diese drei Bedingungen sind nur in Ausnahmefällen alle zugleich erfüllbar, nämlich wenn:

$$a_u^i \times \frac{G_b}{G_u}$$

ganzzahlig ist, für alle $i = 1, \ldots, n$.

Dagegen müssen in der Regel bei einer praktischen Aufgabe Abstriche an wenigstens einer der drei Bedingungen gemacht werden, um das Problem - dann allerdings nur angenähert - lösen zu können.

Im Einzelfall wären hierzu Abstriche an der Summenbedingung denkbar, dergestalt, daß die Bild-Gesamtheit G_b so weit vom Ausgangswert abweichend verändert wird, bis eine ganzzahlige, proportionale Besetzung möglich ist. Dieses Verfahren taugt allerdings nicht für eine allgemeine Vorschrift, weil oft z.B. die Größe eines zu besetzenden Gremiums nicht zur Disposition steht oder aber, je nach den Gegebenheiten von a_u^i und G_u, eine Lösung erst dann existiert, wenn man die Bild-Gesamtheit gleich der Ur-Gesamtheit (oder gleich einem Vielfachen derselben) setzt.

Ein Verzicht auf die Integritätsbedingung ist da nicht möglich, wo es um Anteile geht, die von Individuen wahrzunehmen sind (zum Beispiel Teilnahme an Veranstaltungen) oder aus unteilbaren Einheiten bestehen (zum Beispiel Zimmerverteilung).
Ein Verzicht auf die Integritätsbedingung ist möglich, wo es um Stimmrechte geht (zum Beispiel Eigentümer-Versammlungen).
Im parlamentarischen Raum ist dieses Verfahren jedoch nicht in Gebrauch, wohl deshalb nicht, weil dann in Gremien Repräsentanten mit unterschiedlichen Stimm-Gewichten vertreten wären, die als Mitglieder verschiedener Klassen wahrgenommen werden könnten.

Der Verzicht auf die Integritätsbedingung ist trivial, wenn die aufzuteilende Bild-Gesamtheit aus so feinen Einheiten besteht, daß ein Auf- oder Abrunden der durch einfache Dreisatz-Berechnung ermittelten Bild-Anteile als selbstverständlich hingenommen wird (z. B. Geldbeträge, mit gerundeten Pfennig-Werten).

3. Praktischer Lösungsansatz

Der gebräuchliche Ausweg aus den Schwierigkeiten besteht in **Abstrichen bei der Proportionalitätsbedingung.**

Gesucht werden also nicht mehr die idealen, in der Regel nicht-existierenden Bild-Anteile a_b^i, sondern die realen Bild-Anteile $\bar{a}_b^i$, welche die Integritätsbedingung:

$$\bar{a}_b^i \qquad \text{ganzzahlig}$$

und die Summenbedingung:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_b^i = G_b$$

streng, jedoch die Proportionalitätsbedingung nur angenähert erfüllen:

$$\frac{\bar{a}_b^i}{G_b} \approx \frac{a_u^i}{G_u}$$

Man sucht nun Rechenvorschriften (Verfahren) zur Bestimmung der

$\bar{a}_b{}^i$, die in der Handhabung einfach und durchsichtig sind und als Ergebnis möglichst gering von der Proportionalität abweichende Anteile liefern.

Wie "gut" ein solches Verfahren ist, d. h., wie gering die Abweichungen der damit real ermittelten Anteile von den streng proportionalen - deshalb aber in der Regel nicht mehr ganz zahligen - Anteilen

$$\underline{a}_b{}^i = G_b \times \frac{a_u{}^i}{G_u}$$

ist, dafür gibt es verschiedene Einschätzungen und Beurteilungsmaßstäbe. Diese Frage muß jedoch an anderer Stelle behandelt werden.

II. Berechnungsverfahren

Die gebräuchlichen Berechnungsverfahren lassen sich grob unterscheiden nach <u>integraler</u> bzw. <u>inkrementeller</u> Vorgehensweise.

Integral ansetzende Verfahren berechnen die streng proportionale Zusammensetzung der Bild-Gesamtheit und stellen dann die Integrität auf Kosten der Proportionalität her.

Inkrementell arbeitende Verfahren bauen die Bild-Gesamtheit schrittweise aus Anteils-Einheiten auf, in einem Prozeß, der zwangsläufig die Integrität ständig wahrt und so weit durchlaufen wird, bis die Summenbedingung exakt erfüllt. ist. Auch hier werden die praktisch notwendigen Abstriche bei der Proportionalität gemacht.

Inkrementell arbeitende Verfahren liefern, da sie die Bild-Gesamtheit schrittweise aus Einheiten aufbauen, zugleich eine "Zugriffsreihenfolge" der Beteiligten, eine Eigenschaft, die sie zugleich für entsprechende Aufgaben empfiehlt (z. B. Auswahl der Vorsitz-Ämter in Parlamentsausschüssen).

1. Integral ansetzende Verfahren

Diese Gruppe von Verfahren beschreitet den naheliegenden Weg, zunächst - unter vorläufigem Verzicht auf die Integritätsbedingung - die proportionalen Bild-Anteile entsprechend der Formel

$$\underline{a}_b^i = a_u^i \times \frac{G_b}{G_u}$$

zu berechnen.

Diese vorläufigen Bild-Anteile, welche die Summenbedingung und die Proportionalitätsbedingung einhalten, stellen gemäß ihrer Herleitung rationale Zahlen dar, das heißt, sie brechen in einer Dezimaldarstellung nach einer endlichen Anzahl von Stellen hinter dem Komma ab oder sind periodisch.

In einem zweiten Schritt wird dann davon ausgehend die Erfüllung der Integritätsbedingung hergestellt, was im allgemeinen nur auf Kosten der Proportionalitätsbedingung möglich ist.

Dazu werden die zunächst berechneten proportionalen Anteile aufgespalten in die größten ganzzahligen Anteile I und die Reste R, die daher kleiner als 1 sind:

$$\underline{a}_b^i = I(\underline{a}_b^i) + R(\underline{a}_b^i) \qquad (= I^i + R^i)$$

Im nächsten Schritt werden nunmehr den Beteiligten B^i die ganzzahligen Anteile I^i zugeordnet. Die Summe dieser ganzzahligen Anteile ist nur in dem Fall, daß alle Reste gleich 0 sind, das heißt, daß alle im ersten Schritt berechneten Bild-Anteile $\underline{a}_b^i$ ganzzahlig sind, gleich der vorgegebenen Bild-Gesamtheit; die Aufgabe ist dann unter Erfüllung aller drei Bedingungen schon durch den ersten Schritt gelöst. Gibt es dagegen Reste R^i ungleich 0, so ist die Summe der bisher den Beteiligten zugeteilten Anteile I^i kleiner als die Bild-Gesamtheit G_b. Der Fehlbetrag ist kleiner als die Anzahl der Beteiligten. Die Summe der Reste ist ganzzahlig.

1.1 Verfahren nach Hare/Niemeyer:

Um die Summenbedingung zu erfüllen, also die vorgegebene Bild-Gesamtheit zu erreichen, wird nach Hare/Niemeyer den Beteiligten in absteigender Reihenfolge der Beträge ihrer Reste jeweils eine weitere Einheit zugeteilt, solange, bis die gewünschte Bild-Gesamtheit erreicht ist. Sind dabei mehrere Reste gleich, so führt das nur dann zum Konflikt, wenn ihre Anzahl größer als die der noch zu vergebenden Einheiten ist; ein solcher Konflikt kann innerhalb dieses Verfahrens nicht gelöst werden (sondern zum Beispiel durch Los-Entscheid).

1.2 Andere integral ansetzende Verfahren

Andere Verfahren dieser Gruppe gehen ebenfalls von den Resten R^i aus, werten diese aber nicht ohne weiteres in absteigender Reihenfolge für die Vervollständigung der Bild-Gesamtheit aus, sondern setzen die Reste zuvor etwa noch ins Verhältnis zu einer anderen Größe, sei es zum jeweiligen proportionalen Anteil $\underline{a}_b{}^i$ oder zu dessen ganzzahligem Teil I^i, oder anderes.

2. Inkrementell arbeitende Verfahren

Bei diesen Verfahren werden die Bild-Anteile der Beteiligten und als deren Summe die Bild-Gesamtheit schrittweise aus Anteils-Einheiten aufgebaut. Der Prozeß endet, wenn die gewünschte Stärke der Bild-Gesamtheit erreicht ist.

Welche Stärke der Anteil eines Beteiligten B^i schließlich annimmt, wird dadurch bestimmt, wie oft er bei diesem Verfahren eine Anteils-Einheit zugewiesen bekommen hat, oder in einem anderen Bild, wie oft er "zugreifen" durfte. Wann und damit wie oft ein Beteiligter im Laufe dieses Prozesses zugreifen darf, wird je nach Verfahren unterschiedlich vorgegeben.

Die Verfahren dieser Gruppe haben gemeinsam, daß sie gedanklich vorübergehend statt mit der festen Bild-Gesamtheit G_b mit einer Variablen g_b arbeiten, die bei Null beginnend nicht nur ganzzahlige, sondern auch die dazwischenliegenden rationalen Werte annehmen kann. Nach den unterschiedlichen Kriterien der verschiedenen Verfahren (s.u.) wird ermittelt, bei welchen hypothetischen, nicht zwingend ganzzahligen Werten $g_b{}^{i,j}$ der Bild-Gesamtheit die einzelnen Beteiligten B^i einen hypothetischen Bild-Anteil von j = 1, 2, 3 usw. hätten (oder zum ersten, zweiten, dritten Mal usw. zugreifen dürfen).

(Für das Verfahren unbedeutend, jedoch davon abgesehen bemerkenswert ist, daß bei einem jeden solchen Schritt für den Beteiligten B^i sein hypothetischer Anteil ganzzahlig, die zugehörige Stärke der hypothetischen Bild-Gesamtheit jedoch wie auch die dazugehörigen Anteile der anderen Beteiligten (wenn man sie denn berechnen würde) nicht notwendig ganzzahlig sind.)

Die so entstehenden Werte $g_b{}^{i,j}$ ordnet man nun zunächst ohne Rücksicht auf i bzw. j ihrer Größe nach aufsteigend. Die so entstehende Folge wertet man nach dem Index i aus, indem man für jeden Wert von $g_b{}^{i,j}$ dem entsprechenden Beteiligten B^i eine (seine j-te) Anteils-Einheit zuteilt, so lange, bis die Summe aller zugeteilten Anteils-Einheiten die vorgegebene Bild-Gesamtheit G_b aufgebaut hat.

In praxi wird also jeweils festgestellt, welcher Beteiligte B^i beim nächsthöheren Wert $g_b{}^{i,j}$ der (variablen) Bild-Gesamtheit nach der Vorschrift des jeweiligen Verfahrens das Anrecht (den Zugriff) auf die nächste (seine j-te) Anteils-Einheit hat.

Es werden also den Beteiligten B^i in der Folge der $(g_b{}^{i,j})_{r\ =\ 1,G_b}$ Plätze ("Ränge") mit den Nummern r (beginnend bei 1) zugewiesen. Die Werte $g_b{}^{i,j}$ werden aus diesem Grund auch Rangmaßzahlen genannt.

Die maximalen Werte von j, die bis zum Erreichen der Bild-Gesamtheit G_b den einzelnen Beteiligten B^i zugeordnet wurden, bestimmen die ihnen letztlich zukommenden Bild-Anteile $\bar{a}_b{}^i$. Abweichend davon sind für die bis zum Schluß noch keinmal zum Zuge gekommenen Beteiligten die Bild-Anteile gleich 0.

Als Kriterium dafür, wann der i-te Beteiligte Anspruch auf seine j-te Anteilseinheit hat, benutzen die gebräuchlichen Verfahren seinen Ur-Verhältnisanteil

$$a_u^i : G_u$$

bzw. dessen Kehrwert

$$G_u : a_u^i.$$

Je größer der Ur-Verhältnisanteil eines Beteiligten ist, bei desto kleineren Werten der (vorübergehend variablen) Bild-Gesamtheit g_b hat der Beteiligte Anspruch auf die erste, zweite, ..., j-te Anteils-Einheit. Anders ausgedrückt: bei desto kleineren Werten beginnen und desto dichter auf der g_b-Achse liegen seine "Zugriffsstellen" $g_b^{i,j}$.

Im folgenden werden nur Verfahren betrachtet, die mit diesem Kriterium arbeiten.

Deren Verfahrensweise läßt sich wie folgt in einer Formel fassen:

$$g_b^{i,j} = a_b^{i,j} \times \frac{G_u}{a_u^i} \qquad \text{("Rangmaßzahlen").}$$

Dabei ist

$g_b^{i,j}$ der aktuelle Wert der vorübergehend als variabel (nicht notwendig ganzzahlig) gedachten Bild-Gesamtheit g_b, bei der - hypothetisch - der Beteiligte B^i den Anspruch auf die j-te (j ganzzahlig) Anteils-Einheit hat, nach den Kriterien, die in $a_b^{i,j}$ definiert sind (bei der er also seine j-te Zugriffsstelle hat).

$a_b^{i,j}$ Koeffizient, der festlegt, das Wievielfache des Kehrwerts seines Ur-Verhältnisanteils der Beteiligte B^i mit der durchlaufenden Bild-Gesamtheit $g_b^{i,j}$ erreicht haben muß, um Anspruch auf seine j-te Anteils-Einheit zu haben.

In der Regel sind die Bedingungen für alle Beteiligten gleich, so daß dieser Koeffizient dann nicht von i abhängt.

Aus praktischen Gründen verwendet man in den Algorithmen meist die Umkehrung der vorstehenden Formel:

$$\frac{1}{g_b{}^{i,j}} = \frac{1}{a_b{}^{i,j}} \times \frac{a_u{}^i}{G_u}$$

und multipliziert die Formel mit dem konstanten Faktor G_u (da auf die Reihenfolge der $g_b{}^{i,j}$ ein konstanter Faktor keinen Einfluß hat):

$$S_b{}^{i,j} = \frac{a_u{}^i}{a_b{}^{i,j}} \times \text{const} \qquad (\text{"Höchstzahlen"}).$$

Dem Kehrwert entsprechend muß man dann zur Ermittlung der Reihenfolge beim sukzessiven Aufbau der Bild-Gesamtheit die Zahlen $S_b{}^{i,j}$ absteigend ordnen: der Beteiligte mit dem größten S greift zuerst zu.

Aus diesem Grund werden die Zahlen $S_b{}^{i,j}$ (oder von i und j unabhängige Vielfache davon) Höchstzahlen genannt; die auf dieser Basis arbeitenden Verfahren heißen Höchstzahl- oder Rangmaßzahl-Verfahren.

2.1 Höchstzahl-Verfahren nach d'Hondt

Bei diesem Verfahren wird für die Feststellung, bei welchem vorläufigen Wert der Bild-Gesamtheit der nächste Beteiligte das Anrecht auf die nächste Anteils-Einheit hat und welcher Beteiligte das ist, strenge und "unmittelbare" Proportionalität zugrundegelegt:

man wählt hierbei:

$$a_b{}^{i,j} = j \qquad j = 1, 2, \ldots$$

daher ist: $g_b^{i,j} = j \times \dfrac{G_u}{a_u^i}$

und folglich:

$$S_b^{i,j} = \frac{a_u^i}{j} \qquad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Die Höchstzahlen werden also bestimmt, indem man die Ur-Anteile der Beteiligten der Reihe nach durch 1, 2, 3, ... teilt.

2.2 Rangmaßzahl-Verfahren nach Sainte Laguë/Schepers

Hierbei reicht für den ersten Zugriff eines jeden Beteiligten schon aus, daß die Voraussetzung nach der strengen Proportionalität zur Hälfte (zum 0,5-fachen) erfüllt ist; im übrigen bleibt die Schrittweite gleich, so daß für die weiteren Zugriffe die Voraussetzungen jeweils nur zum 1,5-fachen, 2,5-fachen usw., allgemein zum (j-0,5)-fachen erfüllt sein müssen:

$$a_b^{i,j} = j - 0{,}5 \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots$$

$$g_b^{i,j} = (j - 0{,}5) \times \frac{G_u}{a_u^i}$$

$$S_b^{i,j} = \frac{a_u^i}{j - 0{,}5} \times \text{const}$$

$$S_b^{i,j} = \frac{a_u^i}{2j - 1} \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots$$

Bei diesem Verfahren lassen sich die Höchstzahlen also bestimmen, indem man die Ur-Anteile der Beteiligten durch
1, 3, 5, 7, ... teilt.

Durch diesen Ansatz wird eine beim Verfahren nach d'Hondt leicht mögliche Benachteiligung von Beteiligten mit relativ kleinen Ur-Anteilen vermieden.

2.3 Verallgemeinertes Rangmaßzahl-Verfahren

Der Sprachgebrauch bevorzugt die Bezeichnungen "Höchstzahl-Verfahren nach d'Hondt" und "Rangmaßzahl-Verfahren nach Sainte Laguë/Schepers". Wie gezeigt wurde, geht die Unterscheidung zwischen Rangmaßzahl und Höchstzahl lediglich auf die operative Vorgehensweise zurück, für welche aber beide Verfahren in gleicher Weise offen sind. Deshalb ist es gerechtfertigt, beide Verfahren unter der Bezeichnung "Rangmaßzahl-Verfahren" zusammenzufassen.

An dieser Stelle wird eine allgemeinere Form der Rangmaßzahl-Verfahren unter Einführung eines "Verfahrensparameters" vorgeschlagen:

$$a_b^{i,j} = j - m \qquad j = 1, 2, \ldots$$

mit $0 \leq m < 1$

welche

das Verfahren nach d'Hondt (m = 0)

und

das Verfahren nach Sainte Laguë/Schepers (m = 0,5)

als Spezialfälle einschließt.

Damit gilt allgemein für die Rangmaßzahlen:

$$g_b^{i,j} = (j - m) \times \frac{G_u}{a_u^i} \times \text{const}$$

und für die Höchstzahlen:

$$s^{i,j} = \frac{a_u^i}{(j - m)} \times \text{const}$$

Diese Form wird unter anderem mit dem Ziel eingeführt, Wege für die Auflösung der im folgenden behandelten Mehrdeutigkeiten vorzuschlagen.

2.4 Mehrdeutige Ergebnisse bei Rangmaßzahl-Verfahren

Bei den beiden oben beschriebenen und in der Praxis eingeführten Rangmaßzahl-Verfahren nach d'Hondt bzw. nach Sainte Laguë/Schepers tritt der Fall nicht selten auf, daß zwei oder mehr Höchst- bzw. Rangmaßzahlen (für verschiedene Beteiligte) exakt denselben Wert haben. An dieser "Stelle" des Zugriffs entsteht dann eine Mehrdeutigkeit, d. h. das Verfahren gibt keine Vorschrift, in welcher Reihenfolge die Beteiligten mit gleichen Höchstzahlen zum Zugriff berechtigt sind. Wird das Verfahren allein für die Bestimmung der letztendlichen Bild-Anteile, d. h. zur <u>Zusammensetzung der Bild-Gesamtheit</u>, eingesetzt, so stört eine solche Mehrdeutigkeit nur, wenn die letzten Zugriffe davon betroffen sind, d. h. soweit die letzten maßgeblichen Höchst- oder Rangmaßzahlen mehrdeutig sind. Wenn das Verfahren dagegen (auch) zur Bestimmung einer <u>Reihenfolge des Zugriffs</u> eingesetzt werden soll, ist diese Mehrdeutigkeit auf jeden Fall störend.

Allgemein bedeutet dies, daß das Verfahren unter Umständen keine schlüssigen Ergebnisse liefert und daß man auf verfahrensfremde Hilfsmittel (wie z. B. einen Los-Entscheid) ausweichen muß. Es ist wünschenswert, diesen Mangel innerhalb der Rangmaßzahl-Verfahren abzustellen oder wenigstens die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Mehrdeutigkeit zu verringern.

Mit diesem Ziel wird im Anhang 1 erörtert, wie und in welchen Fällen es zu Mehrdeutigkeiten kommt. Dort wird gezeigt, daß Mehrdeutigkeiten auftreten, wenn eines der vorgegebenen Ur-Verhältnisse

$$\frac{a_u^{ix}}{a_u^{iy}}$$

zufällig mit einem der im Verteilungsverfahren vorkommenden "Zugriffs-Verhältnisse"

$$\frac{j_x - m}{j_y - m}$$

zusammenfällt.

Die Ur-Verhältnisse sind als Ausgangsbedingungen der Verteilungsaufgabe fest vorgegeben; die Zugriffs-Verhältnisse dagegen sind über die in gewissen Grenzen wählbare Größe m zu beeinflussen. Es wird die Vermutung aufgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Auftreten von Mehrdeutigkeiten durch günstige Wahl von m erheblich verringert werden kann, ohne die wesentlichen Eigenschaften (und Ergebnisse) der Verteilungsverfahren nach d'Hondt und nach Sainte Laguë/Schepers ansonsten zu verändern.

Hierzu wird an der Größe m eine dem Betrag nach beliebig kleine positive oder negative Korrektur k ($|k| << 1$) angebracht, die auf eine ggf. vorhandene Mehrdeutigkeit als "Störung" wirkt und die zusammenfallenden Höchstzahlen aufspaltet, so daß sich wieder eine eindeutige Reihenfolge ergibt.

In praxi könnte man etwa k = 0,001 wählen, so daß sich die Höchstzahlen

$$S^{i,j} = \frac{a_u i}{j-(m + k)}$$

im Fall d'Hondt zu

$$S^{i,j} = \frac{a_u i}{j-0{,}001}$$

und im Fall Sainte Laguë/Schepers zu

$$S^{i,j} = \frac{a_u i}{j-0{,}501}$$

ergeben. Für die Rangmaßzahlen gilt entsprechendes.

Wenn man die Berechnungen automatisch vornimmt, spielt die erhöhte Komplikation des Rechenvorganges gegenüber den an sich bestechend einfachen Algorithmen der "reinen" Verfahren nach d'Hondt und Sainte Laguë/Schepers keine Rolle. Grenzen sind hier nur durch die

Genauigkeit des numerischen Verfahrens in der Rechenanlage gesetzt.

Wie eine weitere Nebenbetrachtung (Anhang 2) zeigt, wirkt sich die Auflösung einer Mehrdeutigkeit, die bei d'Hondt (im Fall $m = 0$) und bei Sainte Laguë/Schepers (im Fall $m = 0,5$) auftritt, durch eine Korrektur von m folgendermaßen aus:

Wird m dem Betrage nach geringfügig vergrößert (positives k), so wird der Beteiligte mit dem kleineren Ur-Anteil bevorzugt, kommt also vor dem Beteiligten mit dem größeren Ur-Anteil zum Zugriff. Das Umgekehrte gilt für die Verkleinerung des Betrages von m (negatives k).

(Dieses Verhalten liegt auf der generellen Linie, daß beim Übergang von d'Hondt auf Sainte Laguë/Schepers, d. h. bei der Vergrößerung von $m = 0$ auf $0,5$, eine etwa vorhandene Benachteiligung der Kleineren abgemildert wird.)

Um auch noch solche durch die Korrektur eingebrachten Bevorzugungen bzw. Benachteiligungen auszugleichen, wird ergänzend vorgeschlagen, das Vorzeichen der Korrektur k alternierend zu wählen dergestalt, daß k etwa für ungerade j positiv und für gerade j negativ oder umgekehrt ist, wobei sein Betrag aber konstant bleibt.

Die einzige notwendige Festlegung betrifft dann nur noch, ob man (für $j = 1$) mit positivem oder mit negativem k beginnt.

Die Rangmaßzahlen ergeben sich dann aus der Formel:

$$g_b^{i,j} = (j - (m + (-1)^{j + l} \times |k|)) \times \frac{G_u}{a_u^i}$$

und die Höchstzahlen aus der Formel:

$$S^{i,j} = \frac{a_u^i}{j - (m + (-1)^{j + l} \times |k|)} \qquad j = 1,2,....$$

Verfahrensparameter:

$m = 0$ für das Verfahren nach d'Hondt
$m = 0{,}5$ für das Verfahren nach Sainte Laguë/Schepers

Aufspaltungskonstante: $|k| << 1$

Startparameter: $l = 1$ oder 0

Anhang 1

Mehrdeutigkeiten bei inkrementellen Verfahren

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Betrachtung auf den Fall nur zweier übereinstimmender Höchstzahlen eingeschränkt werden:

$$s^{i_x, j_x} = s^{i_y, j_y}$$

Eine Mehrdeutigkeit tritt dadurch auf, daß die Höchstzahl des Beteiligten i_x für seinen j_x-ten Zugriff gleich derjenigen des Beteiligten i_y für dessen j_y-ten Zugriff ist.

Unter Verwendung der in den vorangehenden Abschnitten stehenden Definitionen ergibt sich, daß dies genau dann der Fall ist, wenn: [1)]

$$\frac{a_u{}^{i_x}}{j_x - m} = \frac{a_u{}^{i_y}}{j_y - m}$$

also $$\frac{a_u{}^{i_x}}{a_u{}^{i_y}} = \frac{j_x - m}{j_y - m}$$

$\dfrac{a_u{}^{i_x}}{a_u{}^{i_y}}$ wurden bereits als die "Ur-Verhältnisse" eingeführt;

$\dfrac{j_x - m}{j_y - m}$ werden hier als die "Zugriffs-Verhältnisse" bezeichnet.

Beim Verfahren nach d'Hondt (m = 0) geht es bei der Frage nach Mehrdeutigkeiten darum, ob das Ur-Verhältnis von zwei Beteiligten sich unter Nutzung etwaiger gemeinsamer Teiler soweit kürzen läßt, daß Zähler und Nenner gleichzeitig in die Zahlen-Bereiche ihrer jeweiligen Anzahl von Zugriffen fallen. Das bedeutet, daß der

---

1) Zur Prüfung, ob tatsächlich eine exakte Gleichheit der Höchstzahlen vorliegt oder etwa nur durch eine Ungenauigkeit der Berechnung vorgetäuscht wird, empfiehlt es sich in der Praxis, statt der Divisionen Multiplikationen durchzuführen: $a_u{}^{i_x} \cdot (j_y - m) = a_u{}^{i_y} (j_x - m)$?

Anhang 1

Zähler des soweit wie möglich gekürzten Bruches gleich einer ganzen Zahl kleiner gleich $\underline{a}_b{}^{i}x$ und zugleich der Nenner gleich einer ganzen Zahl kleiner gleich $\underline{a}_b{}^{i}y$ sind [2]. Wenn auch gleiche Vielfache noch diese Bedingungen erfüllen, kommt es an den entsprechenden Zugriffs-"Stellen" zu Wiederholungen dieser Mehrdeutigkeit.

Bei dem Verfahren nach Sainte Laguë/Schepers ($m = 0,5$) tritt die Mehrdeutigkeit dann auf, wenn das Ur-Verhältnis nach möglichst weitgehender Kürzung Zähler und Nenner besitzt, die gleich einer ungeraden Zahl kleiner gleich $2\underline{a}_b{}^{i}x - 1$ bzw. $2\underline{a}_b{}^{i}y - 1$ sind [2].

Zwar gibt es sowohl bei Sainte Laguë/Schepers wie bei d'Hondt für die Beteiligten i_x und i_y insgesamt eine (nahezu) gleiche Anzahl von Zugriffen, bis ihre Bild-Gesamtheit erreicht ist. Das heißt auch, daß bei beiden Verfahren die Anzahlen möglicher Zähler und möglicher Nenner und demzufolge auch die Anzahlen möglicher Zugriffs-Verhältnisse, für welche Mehrdeutigkeiten infrage kommen, gleich sind.

Jedoch verteilen sich die auftretenden Zähler und Nenner der Zugriffs-Verhältnisse bei beiden Verfahren über unterschiedliche Intervalle im Raum der natürlichen Zahlen:

bei d'Hondt von 1 bis ungefähr $\underline{a}_b{}^{i}x$ bzw. $\underline{a}_b{}^{i}y$;

bei Sainte Laguë/Schepers dagegen von 1 bis ungefähr
$2\underline{a}_b{}^{i}x - 1$ bzw. $2\underline{a}_b{}^{i}y - 1$.

Das heißt, die Dichte der "gefährlichen Stellen" im Raum der natürlichen Zahlen ist bei Sainte Laguë/Schepers geringer (nur etwa halb so groß) als bei d'Hondt. Die Wahrscheinlichkeit, daß Zähler und Nenner der Ur-Verhältnisse darauf fallen, sollte deshalb kleiner sein.

---

[2] Das setzt voraus, daß sich diese Bildanteile tatsächlich bestimmen lassen, also nicht gerade bei den dafür maßgeblichen letzten Zugriffen eine Mehrdeutigkeit auftritt. Sonst muß man bei der Betrachtung von den letzten noch eindeutigen Zugriffen ausgehen und deren Nummern um die noch ausstehenden Zugriffe vorsichtshalber erhöhen.

Ohne weitere Erörterung und ohne Beweis wird hier die Vermutung geäußert, daß dadurch - über eine große Anzahl von Verteilungsaufgaben gemittelt - die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Mehrdeutigkeiten bei Sainte Laguë/Schepers geringer ist als bei d'Hondt.

Diesen Sachverhalt, der von der Einführung der Korrekturgröße m = 0,5 gegenüber der Formel von d'Hondt herrührt, kann man sich noch weiter zunutze machen, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Mehrdeutigkeiten zu verringern, ohne die wesentlichen Eigenschaften der Verfahren nach d'Hondt und nach Sainte Laguë/Schepers anzutasten.

Es geht dabei darum, Zähler und Nenner der Zugriffs-Verhältnisse

$$\frac{j_x - m}{j_y - m}$$

so zu gestalten, daß sie von den vorkommenden Ur-Verhältnissen

$$\frac{a_u i_x}{a_u i_y}$$

nur mit geringerer Wahrscheinlichkeit "getroffen" werden können. Ein Mittel dazu ist, durch geeignete Veränderung von m Zähler und Nenner der Zugriffs-Verhältnisse große Werte annehmen zu lassen, und zwar so, daß jedes dieser Zugriffs-Verhältnisse auch keine gemeinsamen Teiler hat, die durch Kürzung die möglichen Werte von Zähler und Nenner wieder in den gefährlichen Bereich zurückholen könnten.

Große Zahlen für Zähler und Nenner der Zugriffs-Verhältnisse erreicht man durch kleine Korrekturen an den ursprünglichen Werten für m.

Läßt man z. B. auf m eine "Störung" k = 0,001 wirken, setzt also bei d'Hondt statt m = 0 den Wert 0,001 und bei

Anhang 1

Sainte Laguë/Schepers statt 0,5 den Wert 0,501 ein, so ergeben sich als Zugriffs-Verhältnisse [3] bei d'Hondt:

$$\frac{j_x - (m+k)}{j_y - (m+k)} = \frac{999}{1.999};\ \frac{999}{2.999};\ \ldots;$$

$$\frac{1.999}{2.999};\ \frac{1.999}{3.999};\ \ldots;$$

....

$$\frac{5.999}{6.999};\ \frac{5.999}{7.999};\ \ldots;$$

....

und im Falle von Sainte Laguë/Schepers:

$$\frac{j_x - (m+k)}{j_y - (m+k)} = \frac{499}{1.499};\ \frac{499}{2.499};\ \ldots;$$

$$\frac{1.499}{2.499};\ \frac{1.499}{3.499};\ \ldots;$$

....

$$\frac{5.499}{6.499};\ \frac{5.499}{7.499};\ \ldots;$$

....

(die Verhältnisse mit gleichem Zähler und Nenner sind wegge lassen, da sie bedeuten würden, daß die Ur-Anteile zweier Beteiligter gleich wären, ein Fall von Mehrdeutigkeit, der verständlicherweise auch im Rahmen dieser erweiterten Verfahren nicht aufgelöst werden könnte.)

[3] Die Verhältnisse sind jeweils so zu erweitern, daß im Zähler und im Nenner ganze Zahlen stehen, da mit den (ganzzahligen!) Ur-Anteilen zu vergleichen ist.

Es versteht sich, daß die Störung von m auch negativ gewählt werden kann; beispielsweise entstehen für k = -0,001 im Fall von d'Hondt Verhältnisse der Art:

$$\frac{3.001}{7.001}$$

bzw. im Fall von Sainte Laguë/Schepers Verhältnisse der Art:

$$\frac{4.501}{6.501}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird im folgenden angenommen, daß i_x den Beteiligten mit dem kleineren Ur-Anteil a_u^{ix} und i_y den Beteiligten mit dem größeren Ur-Anteil a_u^{iy} bezeichnet.

Die Zahlen in Zähler und Nenner werden bei diesem Verfahren - von eventuellen Kürzungsmöglichkeiten einmal abgesehen - desto größer, je kleiner die Abweichungen in m von den Werten 0 (d'Hondt) bzw. 0,5 (Sainte Laguë/Schepers) sind. Die globalen Eigenschaften der beiden Verfahren werden dagegen durch diese Korrektur desto weniger berührt, je kleiner sie ist.

Wenn es gelänge, unabhängig von einer konkreten Verteilungsaufgabe durch die Wahl eines günstigen Wertes für m solche Werte für Zähler und Nenner zu gewinnen, die einerseits jenseits aller vorkommenden Bild-Anteile liegen (also für die Besetzung der Ausschüsse im Parlament etwa jenseits von 50) und andererseits auch noch Primzahlen darstellen, so daß die Zähler und Nenner nicht durch Kürzung wieder in den kritischen Bereich zurückgeholt werden könnten, so wäre damit die Mehrdeutigkeit bei d'Hondt bzw. Sainte Laguë/Schepers in einem definierten Anwendungsbereich grundsätzlich ausgeschlossen.

Im übrigen müßten die vorstehend geäußerten Vermutungen durch zahlentheoretische Betrachtungen untermauert werden.

Anhang 2

Auswirkungen einer Korrektur zur Auflösung von Mehrdeutigkeiten im Rangmaßzahl-Verfahren

Es liege die Mehrdeutigkeit vor:

$$S^{i_x j_x} = S^{i_y j_y}$$

Das bedeutet

$$\frac{a_u^{i_x j_x}}{j_x - m} = \frac{a_u^{i_y j_y}}{j_y - m} \qquad \text{(I)}$$

Dabei ist vorausgesetzt:

$$0 \leq m < 1$$

Wir ersetzen nun zur Auflösung der Mehrdeutigkeit

m durch $(m + k)$

derart, daß weiterhin gilt

$$0 \leq m + k < 1$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir:

$$j_x - m = N_x \qquad j_y - m = N_y \qquad \text{(II)}$$

Anhang 2

Die neuen Höchstzahlen nach Einführung der Korrektur ergeben sich zu:

$$\bar{s}_{i_x j_x} = \frac{a_{u_{i_x j_x}}}{N_x - k}$$

$$\bar{s}_{i_y j_y} = \frac{a_{u_{i_y j_y}}}{N_y - k}$$

Aus Gleichung (I), die weiterhin gilt, ergibt sich:

$$a_{u_{i_y j_y}} = a_{u_{i_x j_x}} \cdot \frac{N_y}{N_x}$$

$$\bar{s}_{i_y j_y} = \frac{a_{u_{i_x j_x}}}{N_y - k} \cdot \frac{N_y}{N_x}$$

Wir bilden das Verhältnis der neuen Höchstzahlen

$$\frac{\bar{s}_{i_x j_x}}{\bar{s}_{i_y j_y}} = \frac{N_y - k}{N_x - k} \cdot \frac{N_x}{N_y}$$

$$\frac{\bar{s}_{i_x j_x}}{\bar{s}_{i_y j_y}} = \frac{1 - \frac{k}{N_y}}{1 - \frac{k}{N_x}}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an:

$$a_{u_{i_x j_x}} > a_{u_{i_y j_y}}$$

Anhang 2

Daraus folgt unter Verwendung von (I):

$$N_x > N_y$$

Fall a) $k > 0$

$$\frac{k}{N_x} < \frac{k}{N_y}$$

$$1 - \frac{k}{N_x} < 1 - \frac{k}{N_y}$$

$$\overline{S}i_x j_x < \overline{S}i_y j_y$$

Fall b) $k < 0$

$$\frac{k}{N_x} > \frac{k}{N_y}$$

$$1 - \frac{k}{N_x} < 1 - \frac{k}{N_y}$$

$$\overline{S}i_x j_x > \overline{S}i_y j_y$$

Ergebnis:

Eine Vergrößerung von m bewirkt eine Auflösung der Mehrdeutigkeit derart, daß die Höchstzahl des "Stärkeren" (des Beteiligten mit dem größeren Ur-Anteil) gegenüber derjenigen des "Schwächeren" (mit dem kleineren Ur-Anteil) zurückfällt. Bei einer Verkleinerung von m tritt das Umgekehrte ein.