



Infobrief

**Sitzzuteilungsverfahren -
wahlmathematische Systematik und Stand der Diskussion**
Alternativen und ihre Bedeutung für die anstehende Reform des
Bundestags-Wahlrechts

Daniel Lübbert

Sitzzuteilungsverfahren -
wahlmathematische Systematik und Stand der Diskussion

Verfasser: Dr. Daniel Lübbert (Dipl.-Phys.)
Ausarbeitung: WD 8 – 097/09
Abschluss der Arbeit: 07. Dezember 2009
Fachbereich: WD 8: Umwelt, Naturschutz, Reaktorsicherheit,
Bildung und Forschung

- Kurzfassung („Executive Summary“) -

Das Bundesverfassungsgericht hat am 3. Juli 2008 festgestellt¹, dass das geltende Bundestagswahlrecht in Teilen gegen die Verfassung verstößt, weil und soweit über den Effekt des negativen Stimmgewichts die Grundsätze der Gleichheit und der Unmittelbarkeit der Wahl verletzt werden können. Dem Gesetzgeber hat es aufgegeben, bis zum 30. Juni 2011 eine neue, verfassungsmäßige Regelung zu treffen. Ein erster Gesetzentwurf, der eine Lösung des Problems vorschlug, wurde am 3. Juli 2009 vom Plenum des 16. Deutschen Bundestags abgelehnt. Damit stand zum einen fest, dass die Bundestagswahl im September 2009 nach dem alten System stattfinden würde. Zum anderen muss sich der 17. Deutsche Bundestag in der ersten Hälfte seiner Legislaturperiode erneut mit dem Thema Wahlrecht beschäftigen.

Eine Lösung des Problems der negativen Stimmgewichte wird vorwiegend am Thema der Überhangmandate bzw. am zweistufigen System der Sitzzuteilung ansetzen müssen. Hintergründe hierzu wurden bereits in einem früheren Infobrief dargelegt (vgl. Lübbert 2009²). Notwendiger Bestandteil einer Lösung ist aber auch die Entscheidung für ein bestimmtes Sitzzuteilungsverfahren: Im Bundeswahlgesetz (BWahlG) wird u.a. das mathematische Verfahren festgelegt, nach dem Parlamentssitze auf Parteien und Landeslisten verteilt werden (§§ 6, 7 BWahlG). Bisher vorliegende Expertenvorschläge für eine Neuregelung unterscheiden sich im Hinblick auf das Sitzzuteilungsverfahren nicht primär in der Wahl des Verfahrens, sondern vor allem in dessen mathematischer und sprachlicher Formulierung im Gesetzestext. Gerade letztere kann von Bedeutung sein für die Normenklarheit und Verständlichkeit des Verfahrens, die das Verfassungsgericht ausdrücklich fordert.

Als Hintergrund für die somit anstehende Debatte fasst der vorliegende Text Erkenntnisse der Wahlmathematik zusammen. Ziel ist es, grundsätzliche Möglichkeiten sowohl bei der Auswahl eines geeigneten Verfahrens als auch bei dessen möglichst nachvollziehbarer mathematischer Formulierung aufzuzeigen. Zudem soll ein Überblick über die teils überraschenden mathematischen Eigenschaften der unterschiedlichen Verfahrens-Arten gegeben werden. Im Anhang werden diese allgemeinen Eigenschaften anhand von Ergebnissen vergangener Bundestagswahlen illustriert und auf ihre Relevanz in der Praxis überprüft.

¹ Bundesverfassungsgericht, Urteil des Zweiten Senats – Az. 2 BvC 1/07, 2 BvC 07/07 – siehe http://www.bundesverfassungsgericht.de/entscheidungen/cs20080703_2bvc000107.html.

² Siehe http://www.bundestag.de/dokumente/analysen/2009/negative_stimmgewichte.pdf.

Die Aufgabe eines Sitzzuteilungsverfahrens in Verhältniswahlssystemen besteht mathematisch darin, allen zu berücksichtigenden Parteien eine Sitzzahl zuzuweisen, die möglichst genau proportional zu deren Stärke ist. Bei der Bundestagswahl entspricht diese Stärke der jeweiligen Anzahl an Wählerstimmen (das fordert der Grundsatz der Gleichheit der Wahl, aus dem auch die Chancengleichheit der Parteien folgt), bei der Ausschussbesetzung hingegen der Fraktionsstärke im Plenum (dies regelt § 12 der Geschäftsordnung des Bundestages). Diese Aufgabe wäre mathematisch sehr einfach, wenn nicht hinzukäme, dass das Ergebnis ganze Zahlen darstellen muss. Dies kann, außer in Sonderfällen, nur dadurch erreicht werden, dass die „Idealansprüche“ nach bestimmten Regeln gerundet oder in anderer Weise auf ganze Zahlen angepasst werden.

Es eröffnet sich so ein ganzes Feld möglicher Vorgehensweisen, die jeweils Vor- und Nachteile haben. Um diese zu beurteilen, bieten sich einige mathematische Kriterien an. Erstes Kriterium ist dabei das Ideal der **Proportionalität**, dem ein Verfahren zwar im Einzelfall nie ganz entsprechen kann, von dem es aber nicht mehr als nötig abweichen sollte. Diese **Abweichung** kann etwa durch Vergleich der einer Partei zugeteilten Sitze mit der zugehörigen „Quote“ („Hare-Quote“, also dem idealen Sitzanspruch der Partei inklusive Nachkommastellen) gemessen werden. Hält sich diese Abweichung in bestimmten Grenzen, so hat das Verfahren **die Quotenbedingung erfüllt**. Alternativ kann die Abweichung durch Vergleich der Erfolgswerte der Wählerstimmen bzw. der Vertretungsgewichte der Mandate verschiedener Parteien untereinander gemessen werden. Die einzelnen Abweichungen können zudem unterschiedlich gewichtet werden: Entweder wird nur der ungünstigste Einzelvergleich oder aber die durchschnittliche Abweichung im Mittel aller beteiligten Parteien berücksichtigt.

Zweites wichtiges Kriterium ist die **Neutralität in Bezug auf die Parteigröße**: Solange Abweichungen vom Ideal der Proportionalität unvermeidlich sind, sollen alle Parteien davon möglichst gleichmäßig betroffen sein. Vermieden werden soll der Fall, dass entweder große oder kleine Parteien allein aufgrund ihrer Größe benachteiligt werden.

Zwei weitere Kriterien betreffen die **Monotonie**: Sind mehr Sitze zu verteilen, sollen alle Parteien daran teilhaben (können). Nicht vorkommen darf der Fall, dass eine Partei allein aufgrund einer Erhöhung der Gesamtgröße des Parlaments einen Sitz verliert. Ist dieses dritte Kriterium der **Haus-Monotonie** nicht gegeben, so liegt ein Fall des sog. Alabama-Paradoxons (Sitzzuwachs-Paradoxons) vor. Das vierte Kriterium trägt den Namen **Bevölkerungs-Monotonie**: Verzeichnet eine Partei A einen (relativen) Stimmenzuwachs in Vergleich zu Partei B, so darf dies nicht zur Folge haben, dass A einen Sitz an B verliert. Anderenfalls würde sich die Sitzzahl gegenläufig zur Wählerentwicklung verändern; dies schiene schwerlich mit dem Gedanken der Proportionali-

tät vereinbar. Die Sitzzahl beider Parteien soll vielmehr vor dem Hintergrund ihrer Stimmzahlen von beiden als gerecht empfunden werden. Daher darf dieser paarweise Vergleich jeweils nur das Paar A und B betreffen und nicht zusätzlich von Wahlteilnahme oder Wahlerfolg einer dritten Partei C abhängen. Verletzungen dieses Prinzips führen zum sog. Wählerzuwachs-Paradoxon. Ist das Kriterium der Bevölkerungs-Monotonie hingegen erfüllt, so spricht man von „**Konsistenz**“ bzw. „**Kohärenz**“ des Verfahrens.

Jedes der o.g. Kriterien kann für eine selbstverständliche Mindestanforderung an ein gerechtes Verfahren gehalten werden. Die praktische Erfahrung zeigt jedoch, dass viele Verfahren das eine oder andere Kriterium verletzen. Erschwerend hinzu kommt eine grundlegende Erkenntnis: Balinski und Young (1982) bewiesen mathematisch, dass kein denkbare Verfahren in allen Fällen gleichzeitig die Quotenbedingung erfüllen und die Bevölkerungs-Monotonie gewährleisten kann („**Unmöglichkeitssatz von Balinski und Young**“). Zwei der Mindestanforderungen sind demnach miteinander unvereinbar und nicht gleichzeitig erfüllbar.

Ein ideales Verfahren ist deshalb nicht nur noch nicht gefunden, sondern es existiert nicht.

Kompromisse sind unvermeidlich; es kommt darauf an, unter den o.g. mathematischen Kriterien eine geeignete Auswahl zu treffen bzw. **Prioritäten zu setzen**. Um einen geeigneten Kompromiss zu identifizieren, ist es zunächst sinnvoll, alle zur Verfügung stehenden Verfahren systematisch zu klassifizieren. Hierfür erweist sich eine Analogie als hilfreich: Das Problem der Sitzzuteilung bei Verhältniswahlen ist mathematisch fast identisch mit der Verteilung von Wahlkreisen auf einzelne Bundesstaaten in Mehrheitswahlssystemen. Daher ist insbesondere die Erfahrung, die in den USA in über 200 Jahren der Diskussion über Zuteilungsverfahren gewonnen wurde, unmittelbar auf Deutschland übertragbar.

Es existieren drei Hauptgruppen von Verfahren: **Automatische Verfahren** gehen von einer festen Wahlzahl aus und weisen z.B. für je 60.000 Stimmen einen Sitz zu (so in der Weimarer Republik). Ein Nachteil dieser Verfahren liegt darin, dass mit der Wahlbeteiligung die Parlamentsgröße stark schwanken kann. **Quotenverfahren** wie das bekannte Verfahren von Hare/Niemeyer rechnen für jede Partei vorab ihren Idealanspruch (mit Nachkommastellen) aus und runden diesen zunächst für alle Parteien ab, dann aber für einzelne wieder um einen Sitz auf, bis die angestrebte Parlamentsgröße erreicht ist. **Divisorverfahren** schließlich lockern zwecks Erreichen der korrekten Gesamtsumme an Sitzen nicht die individuellen Schwellen für einzelne Parteien, sondern verändern den gemeinsamen Maßstab („Divisor“) so lange, bis nach Neuberechnung mit einer bestimmten Rundung die Summe stimmt. Die Vielfalt der Divisorverfahren unterscheidet sich einzig in der Rundungsvorschrift. Systematische Abrundung führt zum bekannten Verfahren von

D'Hondt, systematische Aufrundung zum Verfahren von Adams, Standard-Rundung (Rundungsgrenze bei Bruchteil 0,50) zum Verfahren von Sainte-Laguë/Schepers. Komplexere Rundungsregeln führen zu den Verfahren von Dean und von Hill-Huntington. Über diese fünf „traditionellen“ Divisorverfahren hinaus existieren unzählige weitere.

Alle Divisorverfahren können auch anders formuliert werden. Möglich sind Formulierungen als **Höchstzahlverfahren**, als **Rangmaßzahlenverfahren**, über **paarweisen Vergleich** oder als **Optimierung einer Zielfunktion**. Die verschiedenen Darstellungs-Varianten für jedes einzelne Verfahren führen in jedem konkreten Fall mit mathematischer Notwendigkeit jeweils zum identischen Zuteilungsergebnis. Sie stellen insofern dasselbe Verfahren dar. Dem Anwender eröffnet sich somit die Freiheit, jedes gewünschte Divisorverfahren je nach Zweck so oder so zu formulieren. Unterschiedliche Zwecke können dabei in der sprachlichen Verständlichkeit der Verfahrensvorschrift, der Einfachheit ihrer Anwendung per Computer oder in der Analyse mathematischer Eigenschaften des Verfahrens liegen.

Werden die Eigenschaften aller Verfahren im Hinblick auf die o.g. Kriterien analysiert, so stellt sich heraus: Quotenverfahren erfüllen immer die Quotenbedingung. Sie können jedoch die Monotonie und Konsistenz verletzen. Dies zeigt sich an Paradoxien, unter denen das Verfahren nach Hare/Niemeyer leidet. Divisorverfahren hingegen sind immer konsistent; sie leiden als einzige nicht unter Paradoxien. Der Anwender hat damit die Wahl zwischen Verfahren, die konsistent sind, und solchen, die die Quotenbedingung erfüllen. Viele Beobachter neigen dazu, die Verletzung der Konsistenz durch Quotenverfahren für so gravierend zu halten, dass die Verletzung der Quotenbedingung bei Divisorverfahren akzeptabler erscheint. Wohl auch deshalb haben sich der US-Kongress (1910) wie der deutsche Wahlgesetzgeber (2008) von Quotenverfahren getrennt.

Beschränkt man daher die weitere Betrachtung auf Divisorverfahren, so unterscheiden sich die einzelnen Verfahren primär in Bezug auf das Kriterium der Parteigrößen-Neutralität. Beim Verfahren nach D'Hondt ist nachweisbar, dass es große Parteien bevorzugt; das Verfahren nach Adams hingegen gewährt kleinen Parteien einen systematischen Vorteil. Das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers weist die größte Neutralität auf und hält gleichzeitig die mögliche Verletzung der Quotenbedingung sehr gering. Insofern spricht nicht alles, aber doch vieles dafür, dass Sainte-Laguë/Schepers ein bestmöglicher Kompromiss ist.

Folgerichtig hat der Bundestag dieses Verfahren 2008 im Bundeswahlgesetz festgeschrieben und im Gesetzestext eine Formulierung als iteratives Verfahren mit Divisor-Anpassung gewählt. Für die anstehende nächste Reform des Bundeswahlgesetzes ist eine naheliegende Möglichkeit, dieses Verfahren beizubehalten, aber es sprachlich anders zu formulieren: Durch Expertenvorschlä-

ge wurde jüngst deutlich, dass die Formulierung des Verfahrens nach Sainte-Laguë/Schepers in der Variante als Höchstzahlverfahren die Klarheit und Kompaktheit des Gesetzestextes ebenso wie seine **Verständlichkeit** erhöhen kann.

Inhaltsverzeichnis

1.	Motivation: Die anstehende Reform des Bundestags-Wahlsystems	9
2.	Hintergrund: Wahlsysteme und Wahlmathematik	11
2.1.	Problemstellung in Verhältniswahlsystemen	11
2.2.	Problemstellung in Mehrheitswahlsystemen	12
2.3.	Lösung: Sitzzuteilungsverfahren	12
2.4.	Sitzzuteilung im Deutschen Bundestag	13
3.	Bekannte Beispiele, historischer Rückblick	15
3.1.	Drei bekannte Sitzzuteilungsverfahren	15
3.2.	Geschichtlicher Rückblick: Anwendung im Deutschen Bundestag	20
3.3.	Zum Vergleich: US-Kongress	21
4.	Anforderungen an Zuteilungsverfahren: Qualitätskriterien	23
4.1.	Proportionalität	23
4.2.	Partei Größen-Neutralität	24
4.3.	Mehrheitsbildung / Mehrheitstreue	25
4.4.	Monotonie: Haus-Monotonie	26
4.5.	Monotonie: Bevölkerungs-Monotonie	26
4.6.	Kombination der Kriterien: Verträglichkeit und Zielkonflikte	27
5.	Zuteilungsverfahren im Überblick: Systematik	29
5.1.	Automatische Verfahren	29
5.2.	Quotenverfahren	30
5.3.	Divisorverfahren	31
6.	Quotenverfahren im Einzelnen: Eigenschaften	35
7.	Divisorverfahren im Einzelnen: Varianten und Eigenschaften	38
7.1.	Alternative Darstellungsformen	38
7.2.	Eigenschaften und mathematische Aussagen zu Divisorverfahren	44
8.	Fazit	45
9.	Anhang: Beispielrechnungen für vergangene Bundestags-Wahlen	47
10.	Quellen und weiterführende Literatur	52

1. Motivation: Die anstehende Reform des Bundestags-Wahlsystems

Das Bundesverfassungsgericht hat am 3. Juli 2008 das bis zur Bundestagswahl 2005 praktizierte Wahlsystem für teilweise verfassungswidrig erklärt³. Dem Gesetzgeber hat es aufgetragen, bis spätestens zum 30. Juni 2011 das Bundeswahlgesetz⁴ (BWahlG) so zu ändern, dass der Effekt des sog. „negativen Stimmgewichts“ (s. Lübbert 2009) nicht mehr auftreten kann. Ein erster Lösungsvorschlag, den die Fraktion Bündnis 90/Die Grünen als Gesetzentwurf⁵ ins Parlament eingebracht hatte, wurde am 3. Juli 2009 vom Plenum des Bundestages abgelehnt. Damit stand nicht nur fest, dass die Wahl im September 2009 noch nach dem alten System stattfinden musste – sondern auch, dass der Bundestag sich in der ersten Hälfte der 17. Wahlperiode erneut mit dem Problem befassen muss.

Die in Fachkreisen bisher diskutierten Lösungsmöglichkeiten sind sich in Teilen sehr ähnlich: Überwiegend streben sie eine Lösung des Problems an, indem die Überhangmandate einer Partei in einem Bundesland zukünftig über die anderen Landeslisten derselben Partei kompensiert werden sollen. Relevante Unterschiede zwischen den einzelnen Vorschlägen existieren jedoch im Hinblick darauf, wie die entsprechenden Sitzverteilungen berechnet werden und insbesondere wie die Berechnungsvorschrift im Gesetzestext formuliert wird. Dies ist gerade auch deshalb von Bedeutung, weil das Verfassungsgericht in seinem Urteil ausdrücklich gefordert hat, „das für

³ Bundesverfassungsgericht, Urteil des Zweiten Senats – Az. 2 BvC 1/07, 2 BvC 07/07 – siehe http://www.bundesverfassungsgericht.de/entscheidungen/cs20080703_2bvc000107.html. Wichtige Zitate daraus: „Der Effekt des negativen Stimmgewichts ... kann dazu führen, dass die Zweitstimme eines Wählers ihre Wirkung in der Mandatsverteilung nicht zu Gunsten, sondern zu Lasten der gewählten Partei entfaltet. Diese Wirkung der Regelungen der Sitzverteilung nach § 6 und § 7 BWG verletzen die verfassungsrechtlichen **Grundsätze der Gleichheit und der Unmittelbarkeit der Wahl**“ (RN 89). „Aus dem Grundsatz der Wahlgleichheit folgt für das Wahlgesetz, dass die Stimme eines jeden Wahlberechtigten grundsätzlich den gleichen **Zählwert** und die gleiche rechtliche **Erfolgchance** haben muss. Alle Wähler sollen mit der Stimme, die sie abgeben, den gleichen Einfluss auf das Wahlergebnis haben“ (RN 92). „Zur Zählwertgleichheit tritt im Verhältniswahlrecht die **Erfolgswertgleichheit** hinzu“ (RN 93). „Der Effekt des negativen Stimmgewichts führt zu einer **rechtserheblichen Beeinträchtigung der Gleichheit der Wahl** zum Deutschen Bundestag“ (RN 101). „Der Effekt des negativen Stimmgewichts beeinträchtigt die Stimmgleichheit bei der Wahl zum Deutschen Bundestag in eklatanter Weise. ... Ein Wahlsystem, das darauf ausgelegt ist ..., dass ein Zuwachs an Stimmen zu Mandatsverlusten führt ..., **führt zu willkürlichen Ergebnissen** und lässt den demokratischen Wettbewerb ... widersinnig erscheinen“ (RN 103). „Ein Berechnungsverfahren, das dazu führt, dass eine Wählerstimme für eine Partei eine Wirkung gegen diese Partei hat, widerspricht aber Sinn und Zweck einer demokratischen Wahl“ (RN 105). „§ 7 Abs. 3 Satz 2 in Verbindung mit § 6 Abs. 4 und 5 BWG **verletzt auch die** verfassungsrechtlich verbürgte **Unmittelbarkeit der Wahl**“ (RN 125). „Der Grundsatz der Unmittelbarkeit der Wahl fordert ein Wahlverfahren, in dem der Wähler vor dem Wahlakt erkennen kann, ... wie sich die eigene Stimmabgabe auf Erfolg oder Misserfolg der Wahlbewerber auswirken kann“ (RN 126). „Die vom Wähler beabsichtigte Stärkung einer politischen Kraft kann diese aufgrund des Effekts des negativen Stimmgewichts auch schwächen. Gesetzliche Regelungen, die derartige Unwägbarkeiten nicht nur in seltenen und unvermeidbaren Ausnahmefällen hervorrufen, sind mit dem Grundsatz der Unmittelbarkeit der Wahl nicht zu vereinbaren“ (RN 127).

⁴ Bundeswahlgesetz in der Fassung der Bekanntmachung vom 23. Juli 1993 (BGBl. I S. 1288, 1594), zuletzt geändert durch die Bekanntmachung vom 5. August 2009 (BGBl. I S. 2687).

⁵ BT-Drs. 16/11885 vom 11.02.2009, siehe <http://dipbt.bundestag.de/dip21/btd/16/118/1611885.pdf>.

den Wähler kaum noch nachzuvollziehende Regelungsgeflecht der Berechnung der Sitzzuteilung im Deutschen Bundestag auf eine neue, normenklare und verständliche Grundlage zu stellen“.

Aus Anlass der somit anstehenden Diskussion über Mechanismen der Sitzzuteilung soll die vorliegende Darstellung einen Überblick über die Breite der in der Fachliteratur diskutierten Sitzzuteilungsverfahren geben. Die Darstellung beschränkt sich dabei nicht auf die Vor- und Nachteile der verschiedenen Berechnungsverfahren und ihre mathematischen Zusammenhänge. Vielmehr liegt ein Augenmerk auch darauf, wie einzelne Verfahren auf sehr unterschiedliche Weise formuliert werden können, ohne dass sich ihr mathematischer Gehalt und die konkreten Sitzverteilungsergebnisse dadurch ändern. Die Kenntnis solcher Darstellungs-Varianten erweist sich insbesondere bei der Suche nach einer normenklaren Formulierung als hilfreich.

Einen zweiten Anlass für den vorliegenden Text bietet das Ergebnis der Bundestagswahl im September 2009: Mit ihr scheint sich endgültig ein Fünf-Parteien-System bis auf weiteres etabliert zu haben. Gerade die Besetzung kleiner Ausschüsse und sonstiger Parlaments-Gremien wird durch eine höhere Zahl von Fraktionen tendenziell schwieriger, als sie es in früheren Jahrzehnten war.

Vor diesem Hintergrund besteht das Ziel der vorliegenden Darstellung darin, einen systematischen Überblick über die gesamte Breite der bekannten Sitzzuteilungsverfahren zu geben. Standardverfahren werden dabei nur kurz rekapituliert, in enger Anlehnung an ausführlichere Darstellungen, denen auch die technischen Details der Anwendung zu entnehmen sind (Mausberg 1995; Deutscher Bundestag 2008; Bundeswahlleiter 2008). Im Fokus stehen vielmehr die mathematischen Eigenschaften der verschiedenen Verfahren, ihre jeweiligen Vor- und Nachteile sowie die systematischen Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen Lösungen. Durch diese Gegenüberstellung der Alternativen soll die Orientierung vereinfacht, Notwendigkeit wie Möglichkeiten von Kompromissen ausgelotet und die informierte Auswahl eines geeigneten Verfahrens erleichtert werden.

2. Hintergrund: Wahlsysteme und Wahlmathematik

Das bei Bundestagswahlen angewendete Wahlsystem folgt überwiegend dem Prinzip der Verhältniswahl, auch wenn es Aspekte der Mehrheitswahl enthält. Wie in allen Verhältniswahlsystemen steht daher die Zusammensetzung des Parlaments nach Auszählung der Wählerstimmen noch nicht unmittelbar fest. Vielmehr müssen die Stimmenergebnisse der unterschiedlichen Parteien zuvor noch in Sitzzahlen umgerechnet werden.

2.1. Problemstellung in Verhältniswahlsystemen

Der Leitgedanke bei Verhältniswahlsystemen ist einfach und klar: Jede Partei soll so viele Sitze im Parlament bekommen, wie es ihrem Anteil an den Wählerstimmen entspricht. Üblicherweise wird dabei die Gesamtzahl der zu vergebenden Parlamentssitze im Voraus festgelegt. Abgesehen von möglichen Einschränkungen dieses Grundprinzips (5%-Hürde bzw. Grundmandatsklausel) ist die Berechnung sehr übersichtlich – mathematisch handelt es sich um ein einfaches Dreisatz-Verfahren. Eine Schwierigkeit resultiert jedoch aus der Bedingung, dass das Ergebnis der Berechnung eine ganze Zahl sein sollte: Bruchteile eines Parlamentssitzes sind schwer zu vergeben. Selbst wenn das Problem theoretisch auch mit einer differenzierenden Gewichtung⁶ der Stimmen der Parlamentarier zu lösen wäre, hat sich in praktisch allen Demokratien ein anderer Lösungsansatz durchgesetzt: Die Ergebnisse der Berechnung (Sitzzahlen mit Nachkommastellen) werden in geeigneter Weise auf eine nahe gelegene, ganze Zahl angepasst, wobei die Summe der so gerundeten Sitzzahlen genau der vorab festgelegten Gesamtzahl der Mandate entsprechen muss. Im Laufe der Demokratiegeschichte sind hierzu zahlreiche Verfahren entwickelt und angewandt worden, die sich auf den ersten Blick meist sehr ähnlich sind, sich aber in wichtigen, politisch relevanten Details signifikant unterscheiden.

Die Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren belaufen sich im Ergebnis meist „nur“ auf wenige einzelne Sitze. Solche Unterschiede sind zweifellos für die Karrierechancen der betroffenen Kandidaten ebenso wie für die Repräsentation der von ihnen vertretenen Wahlkreise ausschlaggebend. Die darüber hinausgehende Bedeutung der Unterschiede für politische Mehrheiten im Parlament und die Regierungsbildung könnte für gering gehalten werden. Dies kann sich je-

⁶ Theoretisch wäre es möglich, bei Abstimmungen im Parlament die Stimmen von Abgeordneten unterschiedlicher Parteien verschieden zu gewichten. Dabei könnte entweder der „letzte“ Abgeordnete jeder Partei jeweils nur einen Anteil eines vollen Stimmrechts bekommen, oder alle Abgeordneten erhielten ein je nach Fraktion leicht verschiedenes Stimmgewicht. Dieses würde sich dann nur geringfügig (im Prozent-Bereich) unterscheiden. Bei Aktionärsversammlungen, Wohnungseigentümergeinschaften etc. sind ähnliche Gewichtungen gängige Praxis. Ob sie sich deshalb allerdings als Vorbild für demokratische Institutionen eignen, kann bezweifelt werden. Eine Stimmgewichtung scheint dem Gedanken zu widersprechen, dass Abgeordnete sich im Parlament gleichberechtigt beugen und auf Augenhöhe miteinander diskutieren.

doch dann als falsch herausstellen, wenn Mehrheiten knapp sind, wie das Beispiel der Wahl des US-Präsidenten Hayes (Abschnitt 3.3) zeigt. Auch in Deutschland gibt es Beispiele für sehr knappe Mehrheiten: So hätte die CDU/CSU-FDP-Koalition, die Helmut Kohl 1994 zum Bundeskanzler wählte, nach der Oberzuteilung eine rechnerische Mehrheit von nur einer Stimme gehabt. Erst bei der Untertzuteilung kamen Überhangmandate hinzu, die die Mehrheit in der Praxis komfortabler machten (zur Ober- und Untertzuteilung vgl. z.B. Lübbert 2009, S. 4).

2.2. Problemstellung in Mehrheitswahlsystemen

Die oben geschilderte Problematik stellt sich in dieser Weise nur für Verhältniswahlsysteme; in Mehrheitswahlsystemen ergibt sich die Zusammensetzung des Parlaments automatisch aus der Gesamtheit der erfolgreichen Kandidaten, die vor Ort in einem Wahlkreis eine Mehrheit errungen haben. Jedoch tritt auch in Mehrheitswahlsystemen ein Problem auf, das mathematisch fast identisch ist: die Wahlkreiseinteilung. Da hier in den einzelnen Wahlkreisen endgültige Entscheidungen fallen, kommt es im Sinne der Gleichheit der Wahl darauf an, dass alle Wahlkreise möglichst exakt gleich groß sind. Verändern sich die Einwohnerzahlen, muss die Wahlkreiseinteilung angepasst werden. Insbesondere in föderalen Systemen wie den USA muss daher regelmäßig neu entschieden werden, welche Mandatszahl auf einzelne Regionen oder Bundesstaaten entfallen soll⁷. Auch hier muss das Berechnungsergebnis wiederum ganzzahlig sein. Die Aufgabenstellung ist daher mathematisch äquivalent zu derjenigen in Verhältniswahlsystemen.

Ein Unterschied liegt allerdings darin, dass die Aufgabe sich vor der Wahl stellt, nicht danach. Ein weiterer Unterschied besteht bei einer möglichen Sonderbehandlung kleiner Einheiten: Während viele Verhältniswahlsysteme den Einzug von Splitterparteien – analog zur deutschen 5%-Hürde – gezielt erschweren, erhalten einwohnerschwache föderale Einheiten oft umgekehrt erleichterte Bedingungen bzw. eine garantierte Mindest-Sitzzahl (US-Bundesstaaten: 1 Sitz; französische Départements: 2 Sitze).

2.3. Lösung: Sitzzuteilungsverfahren

Abgesehen von dieser Nuance sind zur Berechnung der Sitzverteilung in Verhältnis- und Mehrheitswahlsystemen dieselben mathematischen Verfahren geeignet. Dies bedeutet insbesondere,

⁷ Dieses Problem ist in Deutschland aus zwei Gründen nicht von Bedeutung: Erstens wird über Wahlkreise nur die Hälfte der Bundestags-Mandate besetzt; eventuell auftretende Unterschiede bei der Einwohnerzahl werden über die nach Landeslisten vergebene andere Hälfte der Mandate effektiv ausgeglichen. Zweitens wird auch die Gesamtzahl der Mandate pro Bundesland nicht vorab festgelegt, sondern ergibt sich als Ergebnis des Verfahrens von Ober- und Unterverteilung erst aufgrund des konkreten Wahlausgangs. Insbesondere unterschiedliche Wahlbeteiligungen in den Bundesländern können hier zu Verschiebungen führen.

dass die Erfahrungen aus über 200 Jahren Demokratieggeschichte in den USA (erste Kongress-Wahl 1789), die von lang anhaltenden Debatten über ein ideales Sitzzuteilungsverfahren begleitet wurden, von generellem Nutzen sein können. Wesentliche Lehre aus der Geschichte ist dabei, dass ein in jeder Hinsicht ideales Verfahren nicht existiert. Vielmehr ist im Laufe der Zeit ein ganzes Repertoire unterschiedlicher Lösungsansätze vorgeschlagen und zu einem großen Teil auch bereits in der Praxis ausprobiert worden.

Der folgende Text stützt sich wesentlich auf die Fachliteratur, insbesondere auf die Monographien von Balinski/Young (1982) und Kopfermann (1991). Ziel ist es, die in diesen und weiteren Werken enthaltenen Erkenntnisse zusammenzuführen und für die in der 17. Wahlperiode des Deutschen Bundestages anstehende Debatte aufzubereiten.

2.4. Sitzzuteilung im Deutschen Bundestag

Die Berechnung der Sitzverteilung nach einer Bundestagswahl geschieht in zwei Schritten: Zunächst wird das Wahlergebnis in Form der Zweitstimmen-Zahlen auf Bundesebene in die jeweiligen Sitzzahlen umgerechnet, die den einzelnen Parteien zustehen (soweit sie die 5%-Hürde überwunden oder 3 Direktmandate erhalten haben). Nach diesem Berechnungsschritt (Oberzuteilung) steht die Stärke der zugehörigen Fraktionen im neu gewählten Bundestag (bis auf eventuelle Überhangmandate) fest. Im zweiten Schritt werden die Sitze jeder einzelnen Partei auf ihre Landesverbände verteilt und mit Kandidaten aus den jeweiligen Landeslisten besetzt, soweit die Besetzung nicht bereits über Direktmandate festliegt. Nach diesem zweiten Berechnungsschritt (Unterzuteilung) steht also auch die personelle Zusammensetzung der Fraktionen fest.

Für beide Schritte muss vorab ein Zuteilungsverfahren definiert werden. Im ersten Fall werden damit Parlamentsmandate auf Parteien verteilt, im zweiten Fall „Parteisitze“ auf Landesverbände. Theoretisch wäre es möglich, für die beiden Berechnungsschritte zwei verschiedene Verfahren zu verwenden; dafür ist jedoch kein überzeugender Grund ersichtlich. In der Praxis wurden beide bisher immer nach demselben Berechnungsverfahren durchgeführt.

Nach dem Abschluss von Ober- und Unterzuteilung steht fest, welche Abgeordneten dem neuen Bundestag angehören. Doch auch danach sind noch weitere Berechnungen erforderlich: Zunächst sind der Ältestenrat und die Ausschüsse des Bundestages mit Abgeordneten der im Plenum vertretenen Fraktionen zu besetzen. Auch die Posten der Ausschuss-Vorsitzenden sind unter allen

Fraktionen zu verteilen. Die Geschäftsordnung des Deutschen Bundestages⁸ regelt hierzu in § 12, dass diese Entscheidungen „im Verhältnis der Stärke der einzelnen Fraktionen vorzunehmen“ sind. Schließlich sind weitere Gremien – wie Beiräte, Untersuchungsausschüsse, Enquête-Kommissionen, Kontrollgremien, Wahlausschüsse – zu bilden. Zwar werden viele dieser „Sonderfälle“ nicht nach formalisierten Verfahren, sondern im Konsens oder per Einzelfallregelung gelöst. Selbst hier jedoch können mathematische Berechnungsverfahren zumindest Hinweise auf geeignete Verteilungen geben.

Das mathematische Problem ist rein formal in allen diesen Fällen dasselbe; daher ist auch das Repertoire der zur Auswahl stehenden Verfahren immer gleich. Allerdings ist die Zielsetzung nicht genau identisch: Während die Besetzung des Plenums den Wählerwillen möglichst genau abbilden muss, sollte die Ausschussbesetzung vor allem die Machtverhältnisse im Plenum (Mehrheit für die regierende Koalition) widerspiegeln: Es erscheint schlicht zweckmäßig, wenn eine im Ausschuss erarbeitete Beschlussempfehlung gute Chancen hat, anschließend auch im Plenum des Parlaments eine Mehrheit zu finden. Wegen dieser Nuancen in der Zielsetzung kann es akzeptabel erscheinen, für Plenum und Ausschüsse unterschiedliche Zuteilungsverfahren zu verwenden. Dies ist in mehreren Phasen der Bundestags-Geschichte tatsächlich vorgekommen (vgl. Abschnitt 3.2), auch wenn gegenwärtig Plenums- und Ausschussbesetzung wieder nach ein- und demselben Verfahren geregelt sind (Sainte-Laguë/Schepers).

⁸ In der Fassung der Bekanntmachung vom 2. Juli 1980 (BGBl. I S. 1237), zuletzt geändert durch Beschluss des Bundestages vom 2. Juli 2009

3. Bekannte Beispiele, historischer Rückblick

3.1. Drei bekannte Sitzzuteilungsverfahren

Im Folgenden werden zunächst die drei bekanntesten Sitzzuteilungsverfahren vorgestellt. Der anschließende tabellarische Überblick zeigt, zu welchen Zeitpunkten die verschiedenen Verfahren jeweils für die Besetzung von Plenum und Ausschüssen des Bundestages⁹ sowie für die deutschen Abgeordneten des Europaparlaments angewandt wurden. Ergänzt wird die Betrachtung durch einen Vergleich mit der Geschichte der Zuteilungsverfahren im US-Kongress.

3.1.1. Hare/Niemeyer

Das Verfahren nach Hare/Niemeyer ist das klassische Beispiel eines sog. Quotenverfahrens. Die Berechnung der Sitzverteilung erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird für jede Partei aufgrund ihres Anteils an den zu berücksichtigenden Wählerstimmen ihr „Idealanspruch“ (auch: „Quote¹⁰“) als proportionaler Anteil an den zu vergebenden Parlamentssitzen berechnet. Das Ergebnis ist eine Sitzzahl mit Nachkommastellen – z.B. 213,17 Sitze. Der ganzzahlige Anteil dieser Zahl wird der Partei sofort fest zugeteilt – sie erhält im Beispiel garantiert mindestens 213 Mandate. Bildet man dann die Summe über alle Parteien, so ist mit den so zugeteilten Mandaten in aller Regel die Gesamtzahl der zu vergebenden Sitze noch nicht ganz ausgeschöpft. Daher sind in einem zweiten Schritt weitere Restsitze zu vergeben: Nach der Reihenfolge der größten Nachkomma-Bruchteile erhalten so viele Parteien jeweils einen weiteren Sitz, bis die angestrebte Parlamentsgröße (im Bundestag aktuell: 598 Sitze) erreicht ist. Tabelle 1 verdeutlicht dieses Prinzip anhand des Beispiels der Bundestagswahl 2005.

Das Verfahren nach Hare/Niemeyer wurde von 1970 bis 1980 für die Ausschussbesetzung sowie von 1987 bis 2005 für die Besetzung des Plenums des Deutschen Bundestages verwendet. Für die deutschen Abgeordneten im Europaparlament wurde das Verfahren von der dritten bis zur sechsten Europawahl (d.h. von 1989 bis 2004) eingesetzt. Mehrere deutsche Bundesländer verwenden das Verfahren derzeit für die Sitzverteilung in den Landtagen¹¹. Unter der Bezeichnung „Hamil-

⁹ Nicht minder interessant wäre ein Überblick über die in den Parlamenten der Bundesländer (Plenum und Ausschüsse der Landtage) angewandten Verfahren. Wegen der Vielfalt und diverser historischer Umstellungen würde dies jedoch den Rahmen der vorliegenden Darstellung übersteigen.

¹⁰ Der Gebrauch von Begriffen wie „Quote“ ist in der Wissenschaft nicht ganz einheitlich: Was von Mathematikern meist als „Idealanspruch“ oder „Quote“ bezeichnet wird, wird in anderen Disziplinen „exakt proportionale Sitzzahl“ genannt. Der Begriff „Quote“ wiederum wird von Politikwissenschaftlern für das verwendet, was im vorliegenden Text als „Wahlzahl“ bezeichnet wird. Schließlich wird der Terminus „Divisor“, der hier sehr ähnlich der „Wahlzahl“ verstanden werden soll, teils auch im Sinne dessen eingesetzt, was im Folgenden als „Teiler“ (bei Höchstzahlverfahren) bezeichnet wird. Diese Zweideutigkeiten sind zweifellos bedauerlich, können hier allerdings nur dahingehend aufgelöst werden, dass der vorliegende Text einheitlich die eher in der Mathematik übliche Terminologie verwendet.

¹¹ http://www.bundeswahlleiter.de/de/aktuelle_mitteilungen/downloads/Kurzdarst_Sitzzuteilung.pdf

ton-Verfahren“ wurde dasselbe Verfahren in den USA in der gesamten 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts für die Verteilung der Sitze im Repräsentantenhaus verwendet. Das Verfahren folgt einer relativ einfach überschaubaren Logik und hat verschiedene mathematische Vorzüge. Allerdings leidet es in herausgehobener Weise an einigen Nebenwirkungen (sog. „Paradoxien“, vgl. Abschnitt 6). Diese haben den US-Kongress 1901 dazu bewogen, das Verfahren abzuschaffen; ebenso hat der Deutsche Bundestag bei der Wahlrechts-Novelle 2008 die Sitzzuteilung nach Hare/Niemeyer durch das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers ersetzt.

Partei	Zweitstimmen	Stimmenanteil	Idealanspruch (Sitze)	Sitzzahl Hare/Niemeyer
SPD	16.194.665	35,65%	213,17	213
CDU	13.136.740	28,92%	172,92	173
FDP	4.648.144	10,23%	61,18	61
Linke	4.118.194	9,06%	54,21	54
Grüne	3.838.326	8,45%	50,52	51
CSU	3.494.309	7,69%	45,99	46
Summe	45.430.378	100,00%	598,00	598

Tabelle 1: Anwendung des Verfahrens nach Hare/Niemeyer auf die Stimmenergebnisse der Bundestagswahl 2005. In der Reihenfolge der höchsten Nachkomma-Anteile (fett) erhalten nacheinander die CDU und die Grünen einen Restsitz; für die anderen Parteien bleibt es beim (abgerundeten) ganzzahligen Anteil ihres Idealanspruchs (die tatsächlichen Sitzzahlen im Bundestag weichen von den hier gezeigten Zahlen nach oben ab, weil Überhangmandate hinzukommen; vgl. http://www.bundestag.de/bundestag/plenum/wahlen/sitzverteilung_5/1541_16.html).

3.1.2. D'Hondt

Das Verfahren nach D'Hondt ist eines der prominentesten Beispiele einer anderen Gruppe von Sitzzuteilungsverfahren, der sog. „Divisorverfahren“. Auch bei diesen geschieht die Zuteilung in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird wiederum der Idealanspruch (Quote) jeder Partei ausgerechnet. Dabei werden allerdings teils andere Bezeichnungen verwendet; so wird das Verhältnis zwischen Wählerstimmen und Mandaten (d.h. der Quotient aus der Gesamtzahl der abgegebenen Wählerstimmen und der Gesamtzahl der zu vergebenden Mandate) nun als „Divisor“ bezeichnet. Die Stimmenzahl jeder einzelnen Partei wird sodann durch den Divisor geteilt, um so ihren jeweiligen Idealanspruch zu berechnen. Der Divisor (auch: „Wahlzahl“) kann daher anschaulich verstanden werden als die Stimmenzahl, die (im Mittel) nötig ist, um einen einzelnen Parla-

mentssitz zu erhalten. Beispielhafte Zahlenwerte für die jüngeren Bundestagswahlen liegen in einer Größenordnung um 75.000 Stimmen.

Wie bei Hare/Niemeyer stellen die so errechneten Idealansprüche wiederum Zahlen mit Nachkommastellen dar. Diese werden im Verfahren nach D'Hondt ebenfalls zunächst auf die nächst kleinere ganze Zahl abgerundet. Wiederum muss die Summe der so berechneten Ansprüche der einzelnen Parteien nicht mit der Gesamtzahl der zu vergebenden Parlamentssitze übereinstimmen. Daher wird in einem zweiten Schritt nachgebessert, wobei dieser sich nun allerdings vom Verfahren nach Hare/Niemeyer unterscheidet: Statt Restsitze an die Parteien mit den größten Nachkomma-Bruchteilen zu vergeben, wird im Divisorverfahren nach D'Hondt der Divisor so verändert, dass bei erneuter Anwendung auf die Stimmenzahlen der Parteien und entsprechender Rundung die Gesamtzahl der vergebenen Sitze genau die vorab festgelegte Parlamentsstärke ergibt. Wurden beispielsweise im ersten Schritt einige Sitze zu wenig vergeben, so waren offensichtlich die Ansprüche an die erforderlichen Stimmen pro Sitz (d.h. der Divisor) zu hoch angesetzt; er muss deshalb geeignet verkleinert¹² werden. In Tabelle 2 wird das Verfahren anhand eines Zahlenbeispiels verdeutlicht.

Das Verfahren nach D'Hondt wurde in den ersten Jahrzehnten der Geschichte der Bundesrepublik für fast alle Zuteilungsaufgaben eingesetzt (Bundestags-Plenum: bis 1983; Bundestags-Ausschüsse: bis 1969; Europawahlen: bis 1984). Daneben wird das Verfahren teils bis heute in mehreren Bundesländern für die Sitzzuteilung bei Landtagswahlen verwendet. In den USA wurde dasselbe Verfahren unter dem Namen „Jefferson-Verfahren“ von 1790 bis 1840 für die Verteilung der Repräsentantenhaus-Sitze auf die Bundesstaaten genutzt.

¹² In Gesetzestexten wird das Verfahren im Sinne einer rechtlich verbindlichen und eindeutigen Formulierung des Rechenverfahrens als schrittweise-tastendes („iteratives“) Verfahren beschrieben, bei dem der Divisor nach und nach um jeweils einen Zähler herabgesetzt wird, bis die Gesamtzahl der Sitze sich korrekt ergibt. Diese Berechnungsvariante ist insbesondere zur automatisierten Anwendung per Computer geeignet; bei Ausführung von Hand kann sie sich als sehr langwierig erweisen. Mit etwas Erfahrung kann ein passender Divisor von menschlichen Anwendern allerdings sehr schnell „erraten“ und das Verfahren so wesentlich verkürzt werden.

Partei	Zweitstimmen	Idealanspruch	Sitzzahl nach Abrundung	Berechnung mit neuem Divisor	Sitzzahl (D'Hondt)
Divisor		75.970,5		75.500	
SPD	16.194.665	213,17	213	214,499	214
CDU	13.136.740	172,92	172	173,997	173
FDP	4.648.144	61,18	61	61,565	61
Linke	4.118.194	54,21	54	54,546	54
Grüne	3.838.326	50,52	50	50,839	50
CSU	3.494.309	45,99	45	46,282	46
Summe	45.430.378	598,00	595	601,727	598

Tabelle 2: Berechnung nach D'Hondt am Beispiel der Bundestagswahl 2005. Der „naive“ Divisor 75.970,5, der sich als Quotient aus den Gesamtzahlen von Stimmen und Sitzen ergibt, führt dazu, dass 3 Sitze zu wenig verteilt würden. Wird er auf 75.500 erniedrigt, so werden hingegen genau die gesetzlich festgelegten 598 Sitze zugeteilt.

Partei	Zweitstimmen	Idealanspruch	Sitzzahl nach Standardrundung	Berechnung mit neuem Divisor	Sitzzahl (Sainte-Laguë/Schepers)
Divisor		75.970,5		76.000	
SPD	16.194.665	213,17	213	213,09	213
CDU	13.136.740	172,92	173	172,85	173
FDP	4.648.144	61,18	61	61,16	61
Linke	4.118.194	54,21	54	54,19	54
Grüne	3.838.326	50,52	51	50,50	51
CSU	3.494.309	45,99	46	45,98	46
Summe	45.430.378	598,00	598	597,77	598

Tabelle 3: Berechnung nach Sainte-Laguë/Schepers am Beispiel der Bundestagswahl 2005. Bereits der „naive“ Divisor 75.970,5, der sich als Quotient aus den Gesamtzahlen von Stimmen und Sitzen ergibt, führt zur Zuteilung der korrekten Zahl von 598 Mandaten. Er kann jedoch auch z.B. zum geraderen Wert 76.000 heraufgesetzt werden, ohne dass sich das Berechnungsergebnis ändert. Die Unterschiede zu D'Hondt (Tabelle 2) sind gering, aber in gewisser Weise typisch (Details siehe Anhang, S. 43).

3.1.3. Sainte-Laguë/Schepers

Das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers (in den USA: „Webster-Verfahren“) ist wie das oben beschriebene D’Hondtsche Verfahren ein Divisorverfahren: Auch hier werden zunächst Idealansprüche aller Parteien über einen Divisor ausgerechnet. Stimmt nach entsprechender Rundung die Summe der zugeteilten Sitzzahlen nicht mit der angestrebten Parlamentsstärke überein, wird wiederum der Divisor angepasst. Der Unterschied liegt in der Art der Rundung: Während bei D’Hondt immer abgerundet wird, zeichnet sich das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers dadurch aus, dass bei Zahlenbruchteilen ab 0,5 auf die nächst höhere ganze Zahl aufgerundet, bei kleineren Bruchteilen hingegen auf die nächst niedrigere Zahl abgerundet wird. Diese Rundungsvorschrift stimmt mit der in Wirtschaft, Wissenschaft und Technik ganz überwiegend praktizierten Rundung überein; daher trägt das Verfahren auch den Namen „Divisorverfahren mit Standardrundung“. In Tabelle 3 wird das Verfahren anhand eines Zahlenbeispiels verdeutlicht.

Der für eine geeignete Zuteilung zu wählende Wert des Divisors muss zwischen beiden Verfahren nicht exakt übereinstimmen. Vielmehr vergibt das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers (wegen der Aufrundung) meist bereits im ersten Schritt etwas mehr Sitze, weswegen der Divisor weniger stark herabgesetzt werden muss. Konkret hätte sich bei der Oberzuteilung nach der Bundestagswahl 2005 eine passende Zuteilung nach D’Hondt mit einem Divisor von 75.600 ergeben, während für Sainte-Laguë/Schepers ein Divisor von 76.000 geeignet¹³ gewesen wäre.

Das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers wird im Deutschen Bundestag seit 1980 für die Besetzung der Ausschüsse eingesetzt. Im März 2008 wurde das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers darüber hinaus für die Besetzung des Plenums bei zukünftigen Bundestagswahlen sowie der deutschen Abgeordneten im Europaparlament festgelegt¹⁴. Mehrere Bundesländer setzen das Verfahren bereits bei ihren Landtagswahlen ein oder wollen in Kürze darauf umstellen¹⁵.

Die hier gewählte Darstellung der Verfahren über eine schrittweise Anpassung der Divisoren ist nicht die einzige Möglichkeit, Divisorverfahren zu definieren. Es existieren mehrere andere Varianten, die trotz formal völlig unterschiedlicher Beschreibungen zu identischen Berechnungsergebnissen führen (vgl. Abschnitt 7.1.).

¹³ Generell sind Divisoren nicht eindeutig bestimmt; vielmehr ist jeweils ein ganzes Intervall (im Beispiel 2005: alle Zahlen zwischen 75.854 und 76.006) zur Berechnung geeignet, da über die Rundung kleine Unterschiede ausgeglichen werden. Für die Praxis kann aus diesem Intervall eine beliebige Zahl ausgewählt werden; oft wird dazu eine möglichst „runde“ gewählt.

¹⁴ Gesetz zur Änderung des Wahl- und Abgeordnetenrechts (WahluAbgRÄndG) vom 17. März 2008 (BGBl. I S. 394-398).

¹⁵ http://www.bundeswahlleiter.de/de/aktuelle_mitteilungen/downloads/Kurzdarst_Sitzzuteilung.pdf

3.2. Geschichtlicher Rückblick: Anwendung im Deutschen Bundestag

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die in der Geschichte der Bundesrepublik angewandten Sitzzuteilungsverfahren:

Deutscher Bundestag				Europaparlament	
WP	Ab	Plenum	Ausschüsse	WP	Verfahren
1	1949	D'Hondt	D'Hondt		
2	1953	D'Hondt	D'Hondt		
3	1957	D'Hondt	D'Hondt		
4	1961	D'Hondt	D'Hondt		
5	1965	D'Hondt	D'Hondt		
6	1969	D'Hondt	D'Hondt (bis 4.11.1970), dann: Hare/Niemeyer		
7	1972	D'Hondt	Hare/Niemeyer		
8	1976	D'Hondt	Hare/Niemeyer	1. WP 1979	D'Hondt
9	1980	D'Hondt	Sainte-Laguë/Schepers		
10	1983	D'Hondt	Sainte-Laguë/Schepers	2. WP 1984	D'Hondt
11	1987	Hare/Niemeyer	Sainte-Laguë/Schepers		
12	1990	Hare/Niemeyer	Sainte-Laguë/Schepers	3. WP 1989	Hare/Niemeyer
13	1994	Hare/Niemeyer	Sainte-Laguë/Schepers	4. WP 1994	Hare/Niemeyer
14	1998	Hare/Niemeyer	Sainte-Laguë/Schepers	5. WP 1999	Hare/Niemeyer
15	2002	Hare/Niemeyer	Sainte-Laguë/Schepers		
16	2005	Hare/Niemeyer	Sainte-Laguë/Schepers	6. WP 2004	Hare/Niemeyer
17	2009	Sainte-Laguë/Schepers		7. WP 2009	Sainte-Laguë/Schepers

Tabelle 4: Überblick über die Geschichte der in Deutschland angewandten Sitzzuteilungsverfahren
(WP=Wahlperiode. Quelle: Datenhandbuch des Deutschen Bundestages; vgl. www.bundestag.de,
www.bundeswahlleiter.de)

3.3. Zum Vergleich: US-Kongress

In den USA, die seit mehr als zwei Jahrhunderten demokratische Wahlen abhalten, wird schon wesentlich länger als in Deutschland über geeignete Sitzzuteilungsverfahren gestritten.

US-Kongress: Verfahren zur Verteilung der Sitze im Repräsentantenhaus auf die Bundesstaaten

Epoche (Zensus-Jahre)	Verfahren für Sitzverteilung auf die Bundesstaaten	Anzahl Sitze im Repräsentantenhaus
1790-1830	Jefferson method (= D'Hondt)	105 (ab 1793) ... 240 (ab 1832)
1840	Webster method (= Sainte-Laguë/Schepers)	223 (ab 1842)
1850-1900	Hamilton method (= Hare/Niemeyer)	234 (ab 1852) ... 386 (ab 1901)
1910, 1930	Webster method (= Sainte-Laguë/Schepers)	433/435 (ab 1911) 435 (ab 1931)
1940-heute	Hill's method (= Hill-Huntington)	435 (ab 1941)

Tabelle 5: Geschichte der Sitzzuteilungsverfahren für den US-Kongress. Die Gleichsetzung mit den von Bundestagswahlen bekannten Verfahren ist dabei nur als ungefähre Analogie zu verstehen. Ein relevanter Detail-Unterschied lag in den Anfangsjahren darin, dass die Parlamentsgröße nicht vorab festgelegt wurde, sondern im Wechselspiel mit wiederholten Verteilungs-Berechnungen variiert wurde, bis das Ergebnis akzeptabel erschien (Quellen: Balinski/Young (1982); <http://www.census.gov/population/www/censusdata/apportionment/history.html>).

Im Mehrheitswahlssystem der USA besteht die Aufgabe für Sitzzuteilungsverfahren – im Unterschied zu Verhältniswahlssystemen – nicht darin, nach der Wahl Parlamentssitze auf Parteien zu verteilen. Vielmehr müssen hier vor der Wahl Sitzzahlen für die einzelnen Bundesstaaten festgelegt werden. Dafür wurden im Laufe der über 200jährigen US-Geschichte eine Reihe von verschiedenen Verfahren verwendet (Tabelle 5). Während in der zweiten Parlamentskammer (Senat) jeder Bundesstaat zwei Sitze hat, sind die Sitzzahlen im Repräsentantenhaus an die Bevölkerungszahlen der Bundesstaaten gebunden. Dies regelt die Verfassung der USA: In Artikel 1 (Section 2, Clause 3) garantiert sie jedem Bundesstaat – egal wie klein – mindestens einen Sitz und schreibt vor, die Verteilung alle zehn Jahre neu vorzunehmen, um sie der veränderlichen Zahl und Bevölkerung der Bundesstaaten anzupassen. Daher wird alle zehn Jahre eine Volkszählung vorgenommen. Ein bis zwei Jahre darauf beschließt der US-Kongress die neue Sitzverteilung,

wobei er historisch teils die abstrakte Berechnungsmethode, teils die konkrete Sitzverteilung per Gesetz festgeschrieben hat.

Diese Sitzverteilung ist primär für die alle zwei Jahre stattfindenden Wahlen zum US-Repräsentantenhaus relevant. Über das Wahlmännerkollegium, in dem jeder US-Staat über so viele Stimmen verfügt, wie er Repräsentanten plus Senatoren im Kongress hat, ist die Sitzverteilung jedoch mit ausschlaggebend für die US-Präsidentenwahl. Aus diesem Zusammenhang stammt auch das eindrucklichste Beispiel für die politischen Folgen selbst kleiner Sitzverschiebungen: Die Präsidentschaftswahl 1876 gewann der Republikaner Rutherford B. Hayes mit 185 Stimmen gegen seinen Konkurrenten Samuel Tilden, der mit 184 nur eine Stimme weniger im Wahlmännerkollegium erhielt. Wahlmathematiker sind der Meinung, dass dessen Zusammensetzung zuvor falsch berechnet wurde; bei korrekter Berechnung mit der gesetzlichen Zuteilungsmethode wäre wohl der Demokrat Tilden gewählt worden (Balinski/Young 1982, S. 37).

Betrachtet man die Geschichte der Sitzzuteilungsverfahren in den USA, so fällt auf, dass sie einen erheblichen Anteil an „Versuch und Irrtum“ zu enthalten scheint¹⁶: Vielfältige Methoden wurden vorgeschlagen, zahlreiche davon auch praktisch ausprobiert. Später erkannte Probleme führten dazu, dass Methoden verworfen und durch wieder andere ersetzt wurden. Gleichzeitig änderte sich die Parlamentsgröße regelmäßig, nicht nur wegen der wachsenden Zahl und Bevölkerung der US-Staaten: Als in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts keines der bis dahin bekannten Verfahren allein akzeptabel erschien, wurde die Sitzzahl gezielt auf solche Zahlen erhöht, für die Zuteilungsverfahren von Hamilton (Hare/Niemeyer) und Webster (Sainte-Laguë/Schepers) unabhängig voneinander zur identischen Verteilung führten (vgl. Balinski/Young 1982, S. 40). Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde das Parlaments-Wachstum gestoppt und seine Größe auf das heutige Niveau festgelegt; seit etwa 70 Jahren scheint auch der Streit um das richtige Zuteilungsverfahren entschieden.

Ein weiterer Punkt springt beim Vergleich von Tabelle 4 mit Tabelle 5 ins Auge: Die Geschichte der Sitzzuteilungsverfahren in Deutschland und den USA weist eine erstaunliche Parallelität auf – beide Staaten nutzen (unter unterschiedlichen Bezeichnungen) anfangs das Verfahren von D’Hondt, später die Methode von Hare/Niemeyer, danach das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers. Allerdings geschieht die Entwicklung in den USA nicht nur jeweils 100-150 Jahre früher, sondern sie hat nach heutigem Stand auch bereits einen Schritt mehr getan (Verfahren nach Hill-Huntington).

¹⁶ vgl. <http://www.ctl.ua.edu/math103/apportionment/apphisty.htm>

4. Anforderungen an Zuteilungsverfahren: Qualitätskriterien

Angesichts der Fülle der existierenden Sitzzuteilungsverfahren kann die Auswahl eines „optimalen“ Verfahrens schwer fallen. Es erweist sich daher als nützlich, alle in Frage kommenden Verfahren auf ihre mathematischen Eigenschaften zu untersuchen. Sind wünschenswerte Eigenschaften einmal abstrakt formuliert, können sie als Kriterien für die Auswahl akzeptabler Verfahren dienen. Gleichzeitig kann die Untersuchung und systematische mathematische Gegenüberstellung aller gewünschten Eigenschaften Orientierung in der Frage liefern, ob die Suche nach dem „idealen“ Verfahren Aussicht auf Erfolg verspricht oder ob Kompromisse unausweichlich sind.

4.1. Proportionalität

Die Idee der Verhältniswahl besteht darin, dass jede Partei möglichst entsprechend dem Grad der Zustimmung, den sie beim Wahlvolk findet, auch im Parlament vertreten sein soll. Ziel ist es also, jeder Partei so viele Sitze zuzuteilen, dass ihr Sitzanteil im Parlament dem Anteil der Stimmen dieser Partei entspricht. Die Sitzzahl, bei der diese Bedingung exakt erfüllt wäre, wird als „**Idealanspruch**“ (auch: „**Quote**“) bezeichnet. Dieser Wert ist als Orientierung und Vergleichsmaßstab äußerst wichtig; in aller Regel ist er keine ganze Zahl, sondern weist Nachkommastellen auf.

Es können nur ganze Sitze zugeteilt werden. Daher sind Idealansprüche nur in Ausnahmefällen realisierbar. Falls der äußerst seltene Fall eintritt, dass alle Idealansprüche „zufällig“ auf ganze Zahlen fallen, sollte ein Verfahren diese als Sitzzahlen zuweisen. Ein Verfahren, das dies gewährleistet, wird als „**exakt**“ (auch: „selbstabbildend“) bezeichnet. Für alle anderen Fälle liegt es nahe zu fordern, dass die Sitzzahl möglichst wenig – konkret: um nicht mehr als einen ganzen Sitz – von der Quote abweichen sollte. Dann muss die tatsächliche Sitzzahl, von der Quote ausgehend, entweder der nächst höheren oder der nächst niedrigeren ganzen Zahl entsprechen. Ein Verfahren, das dies unter allen Umständen garantiert, „**erfüllt die Quotenbedingung**“. Diese Bedingung ist wesentlich schwieriger zu erfüllen und wird von vielen Verfahren (gelegentlich) verletzt.

Erweist sich diese Bedingung als zu streng, kann man zumindest fordern, dass die Sitzzahl einseitig entweder nicht kleiner als der abgerundete Idealanspruch („**untere Quotenbedingung**“) oder nicht größer als der aufgerundete Idealanspruch („**obere Quotenbedingung**“) sein soll. Ersatzweise kann von einem Verfahren verlangt werden, dass es nach Möglichkeit „**der Quotenbedingung nahe kommen**“ soll: Diese Bedingung ist erfüllt, soweit ein Zuteilungsergebnis nicht dadurch weiter verbessert werden kann, dass Sitze von einer Partei zu einer anderen verschoben

werden und dabei beide Parteien ihrem Idealanspruch näher kommen („staying near quota“, s. Balinski/Young 1982, S. 132).

Statt in Form von Idealanspruch bzw. Quote, also auf der Skala der absoluten Sitzzahlen, kann die Proportionalität einer Sitzzuteilung alternativ auch in den Einheiten „Sitze pro Stimme“ oder „Stimmen pro Sitz“ quantifiziert und überprüft werden. Der Quotient aus Sitzzahlen und Wählerstimmen einer Partei wird als „**Erfolgswert**“ der Wählerstimmen bezeichnet (Sitze pro Stimme). Der umgekehrte Quotient aus Wählerstimmen und Sitzzahlen einer Partei wird „**Vertretungswert**“ bzw. „**Vertretungsgewicht**“ ihrer Mandate genannt. Dies entspricht mathematisch dem Kehrwert des Erfolgswertes; anschaulich bedeutet das Vertretungsgewicht, wie viele Wähler (im Mittel) hinter einem Abgeordneten der Partei stehen.

4.2. Parteigrößen-Neutralität

Nicht nur bei der Wahlhandlung, sondern auch danach bei der Sitzzuteilung muss die Chancengleichheit aller Parteien durch das Verfahren gewahrt bleiben. Insbesondere sollte keine Partei aufgrund der spezifischen Größe ihres Stimmenanteils einen vorhersehbaren Vor- oder Nachteil erleiden. Auch wenn diese Forderung selbstverständlich erscheint, so sind doch in der Praxis selbst unter den bekanntesten Verfahren solche, die großen oder kleinen Parteien einen systematischen Vorsprung verschaffen.

Bei einer Diskussion dieses Aspekts ist insbesondere zu beachten, dass eine spezifische Bevorzugung oder Benachteiligung nicht schon am konkreten Ergebnis einer einzelnen Zuteilung erkannt werden kann. Vielmehr kann sie nur entweder aus dem mathematischen Prinzip des Zuteilungsverfahrens oder aber aus der statistischen Betrachtung einer größeren Schar von tatsächlichen Zuteilungen abgeleitet werden.

Für den Spezialfall der deutschen Parteienlandschaft gilt zudem: Bei der Sitzverteilung auf Bundesebene ist als Parteigröße nicht die Stärke einer Partei in einzelnen Ländern maßgeblich, sondern ihr Stimmenanteil im Bundesgebiet. In diesem Sinne zählt zu den (relativ) kleinen Parteien auch die CSU, deren Stimmenanteil im Bund oft um 10% lag; in der 16. Wahlperiode war sie mit 7,69% der Bundes-Stimmen die kleinste der im Bundestag vertretenen Parteien. Sie ist von den Eigenschaften der Zuteilungsverfahren daher in ähnlicher Weise betroffen wie FDP, Bündnis 90/Die Grünen und Die Linke.

Wird bei einem zweistufigen System wie dem bei der Bundestagswahl praktizierten, bei dem Sitze zunächst auf Parteien und danach auf Regionen (Bundesländer) verteilt werden, ein nicht größenneutrales Zuteilungsverfahren gewählt und auch für die Unterverteilung angewandt, so

können sich darüber hinaus spezifische Vor- und Nachteile für große oder kleine Landesverbände innerhalb derselben Partei ergeben.

Die Frage der Parteigrößen-Neutralität ist noch aus einem anderen Blickwinkel von Bedeutung: Bevorzugt ein Zuteilungsverfahren systematisch kleinere Parteien, so könnte eine bestehende Partei einen theoretischen Vorteil dadurch erlangen, dass sie sich in zwei kleinere Teil-Parteien aufspaltet. Deren Sitzansprüche nach einer Parlamentswahl könnten, selbst wenn sie keine neuen Wähler hinzugewinnen, in der Summe höher liegen als der Sitzanspruch der Mutterpartei vor der Aufspaltung – bei gleicher Stimmenzahl. Ein solches Verfahren **begünstigt Partei-Spaltungen**. Gewährt das Sitzzuteilungsverfahren umgekehrt größeren Parteien einen Vorteil, so könnten zwei kleinere Parteien ihr späteres Gewicht im Parlament zu erhöhen versuchen, indem sie gemeinsam zur Wahl antreten bzw. sich zu einer Partei zusammenschließen. Ein solches Verfahren **begünstigt Koalitionen bzw. Partei-Fusionen**.

Jedes Zuteilungsverfahren, das nicht parteigrößen-neutral ist, kann in diesem Sinne – gewollt oder ungewollt – bestimmte Entwicklungen in der Parteienlandschaft begünstigen. Manche Beobachter betrachten deshalb Verfahren, die größeren Parteien einen Vorteil gewähren, als vorzugswürdig, weil sie Anreize gegen eine Zersplitterung der Parteienlandschaft setzen könnten. Bei der Betrachtung ist allerdings zu berücksichtigen, dass das Bundeswahlgesetz dasselbe Ziel bereits mit der 5%-Hürde verfolgt. Ob die Aufgabe, eine Zersplitterung der Parteienlandschaft zu verhindern, zusätzlich auch über das Sitzzuteilungsverfahren gelöst werden kann und muss, ist insofern fraglich.

4.3. Mehrheitsbildung / Mehrheitstreue

Nach jeder Wahl hat ein Parlament meist zunächst eine Regierung bzw. einen Regierungschef zu bestimmen, wozu die Stimmen von mehr als der Hälfte der Parlamentarier erforderlich sind. Um auch hierbei den Wählerwillen möglichst exakt abzubilden, sollte das Sitzzuteilungsverfahren gewährleisten, dass eine Partei, die über 50% der an der Verrechnung teilnehmenden Wählerstimmen erhalten hat, auch mehr als die Hälfte der Parlamentssitze erhält. Dies ist im Bundeswahlgesetz (§ 6 Abs. 3) über eine Sondervorschrift – unabhängig vom sonstigen Zuteilungsverfahren – ausdrücklich geregelt.

Eine weitergehende Forderung vertritt Hermsdorf (1996, 2009): Das von ihm formulierte Konzept der „Mehrheitstreue“ verlangt, dass nicht nur einzelne Parteien, sondern auch jede rechnerisch mögliche Parteien-Koalition, die mehr als die Hälfte der Wählerstimmen auf sich vereinigt, zusammen mehr als die Hälfte der Parlamentssitze erhalten sollte. Da nach dem Wahlausgang fast

immer mehrere verschiedene Koalitionen rechnerisch möglich sind, ist das Prinzip der Mehrheitstreue nur dann erfüllt, wenn jede einzelne dieser „Koalitionen“ gleichzeitig eine hypothetische Parlaments-Mehrheit erhält.

4.4. Monotonie: Haus-Monotonie

Die Mathematik kennt den Begriff der Monotonie: Eine Zuordnungsvorschrift („Funktion“), die jeder Eingabe einen Ausgabewert zuordnet, heißt **monoton**, wenn sie für größere Eingabewerte immer auch größere Ausgabewerte ergibt - oder zumindest gleich große, niemals aber kleinere. Auf Sitzzuteilungsverfahren ist dies mehrfach anwendbar: So sollte ein Zuteilungsverfahren garantieren, dass etwa eine Erhöhung der Gesamtzahl der Parlamentssitze für keine Partei zu einem Sitzverlust führen kann (**Haus-Monotonie**). Auch sollte – bei gleicher Gesamtsitzzahl – ein Stimmenzuwachs für eine einzelne Partei bei gleichbleibender Stimmenzahl aller anderen Parteien niemals dazu führen, dass diese Partei einen Sitz verliert (**Stimmen-Monotonie**).

Eine der überraschendsten Lehren aus der Geschichte der Wahlsysteme war, dass manche Zuteilungsverfahren eine Verletzung dieser Prinzipien verursachen können. Diese Effekte wurden zuerst in den USA beobachtet und haben in der Entwicklung des US-Wahlsystems eine prominente Rolle gespielt. Sie sind unter dem Begriff der **Paradoxien** bekannt geworden (vgl. Nurmi 1999, Fehndrich 1999). Eine Verletzung der Haus-Monotonie führt zum Alabama-Paradoxon (s. Abschnitt 6).

Im Bundestags-Wahlsystem, wie es zur Wahl 2005 angewandt wurde, kann zudem ein Stimmenzuwachs zu einem Sitzverlust derselben Partei führen. Dieser Effekt des negativen Stimmgewichts ist allerdings nicht allein auf ein spezielles Sitzzuteilungsverfahren, sondern auf die komplexe Wechselwirkung zwischen Ober- und Unterverteilung und den Effekt der dabei entstehenden Überhangmandate zurückzuführen.

4.5. Monotonie: Bevölkerungs-Monotonie

Weiterhin soll ein Stimmenzuwachs einer Partei nicht dazu führen können, dass sich Sitze zwischen zwei anderen Parteien verschieben. Vielmehr sollen sich die Sitzzahlen von zwei Parteien A und B im Vergleich nur aus deren jeweiligem Stärkeverhältnis ergeben und vor dem Hintergrund der von diesen beiden Parteien errungenen Stimmenzahlen als gerechtfertigt erscheinen. Der Ausgang des Vergleichs kann deshalb nicht von Wahlteilnahme oder Wahlerfolg einer dritten Partei C abhängen. Beschränkt man die Betrachtung in dieser Weise auf paarweise Vergleiche, so darf ein relativer Stimmzuwachs von A gegenüber B keinesfalls dazu führen, dass A einen Sitz an

B verliert. Anderenfalls würde sich die Sitzzahl gegenläufig zur Stimmenentwicklung verändern; das wäre schwerlich mit dem Gedanken der Proportionalität vereinbar.

Ist diese Bedingung erfüllt, spricht man von **Bevölkerungs-Monotonie**. Alternativ sind auch die Begriffe **Konsistenz** bzw. **Kohärenz** des Verfahrens gebräuchlich (vgl. Balinski (2004); Balinski/Pukelsheim (2007)). Um 1900 wurde in den USA erstmals deutlich, dass die Bedingung verletzt werden kann: Im Zuge des Bevölkerungswachstums verlor dort ein schneller wachsender Bundesstaat einen Sitz an einen langsamer wachsenden; dies ist ein Fall des Bevölkerungs-Paradoxons bzw. Wählerzuwachs-Paradoxons¹⁷ (vgl. Abschnitt 6).

4.6. Kombination der Kriterien: Verträglichkeit und Zielkonflikte

Die oben genannten Kriterien sind jeweils für sich plausibel, stehen aber darüber hinaus auch in vielfältigen Wechselbeziehungen zueinander. Für die Suche nach einem „idealen“ Verfahren ist deshalb auch die Frage von Bedeutung, inwieweit es überhaupt möglich ist, durch ein Verfahren alle Kriterien gleichzeitig zu erfüllen – oder ob sie etwa untereinander in einer solchen Weise in Zielkonflikten stehen, dass Kriterien sich gegenseitig ausschließen.

Ein Beispiel für einen denkbaren Zielkonflikt ist die Frage, ob Proportionalität bzw. Parteiengrößen-Neutralität einerseits und die Mehrheitsbedingung zwecks stabiler Regierungsbildung andererseits sich gegenseitig ausschließen. Diese vermeintliche Unverträglichkeit dient gelegentlich als Argument zugunsten von Verfahren, die große Parteien systematisch bevorzugen. Rechenbeispiele aus der Geschichte der Bundestagswahlen (vgl. Anhang, S. 43) zeigen allerdings, dass diese Verfahren oft dazu tendieren, Sitze vom kleinen zum großen Koalitionspartner innerhalb desselben politischen „Lagers“ umzuverteilen; die Machtverteilung zwischen Regierung und Opposition bleibt dabei unverändert. Ein solcher „Kompromiss“ kann daher Gefahr laufen, zwei Nachteile miteinander zu kombinieren, indem er die Proportionalität mehr als nötig verletzt, ohne dadurch die Regierungsmehrheit stabiler zu machen.

Ein wesentlicher Zielkonflikt, der tatsächlich zu Kompromissen zwingt, ist allerdings der folgende, der als „**Unmöglichkeitssatz von Balinski/Young** (1982)“ bekannt geworden ist:

¹⁷ Auch für den Bundestag zeigen Berechnungen, dass bei Verwendung eines inkonsistenten Verfahrens das Wählerzuwachs-Paradoxon in der Praxis auftreten kann. So hätte bei der Bundestagswahl 1998 die FDP einen Sitz mehr und die PDS einen Sitz weniger erhalten, wenn die CDU 38.000 Zweitstimmen weniger bekommen hätte (Berechnung nach dem Verfahren von Hare/Niemeyer mit der Software „BAZI“; siehe auch <http://www.wahlrecht.de/verfahren/paradoxien/population.html>).

Ein Sitzzuteilungsverfahren kann nicht gleichzeitig die Quotenbedingung und das Kriterium der Bevölkerungs-Monotonie erfüllen. Ausnahmen sind nur dann möglich, wenn die Parteienzahl kleiner als 4 oder die zu verteilende Sitzzahl kleiner als 7 (bzw. als die Parteienzahl plus 3) ist.

Jedes denkbare Verfahren muss unausweichlich entweder am Wählerzuwachs-Paradoxon leiden oder aber die Quotenbedingung (gelegentlich) verletzen. Die Bevölkerungs-Monotonie (bzw. die Konsistenz oder Kohärenz), die zunächst als plausible Forderung an ein Wahlverfahren erscheint, erweist sich daher als eine sehr harte Bedingung. Zwar gilt, dass ein bevölkerungsmonotones Verfahren automatisch auch haus-monoton ist. Jedoch kann ein solches Verfahren nicht gleichzeitig die Einhaltung der Quotenbedingung gewährleisten. Dieser Satz stellt sich als zentrale Schwierigkeit bei der Auswahl von Sitzzuteilungsverfahren heraus.

Eine wichtige Aufgabe der systematischen Untersuchung und Einordnung der bekannten Verfahren liegt vor diesem Hintergrund darin, bei jedem Verfahren zu analysieren, durch welche Art von Kompromiss es diese Unverträglichkeit löst und für welches der konkurrierenden Ziele es sich entscheidet – ohne dabei die Analyse der verbleibenden Kriterien (Bevorzugung aufgrund Größe, Mehrheitseigenschaften) zu vernachlässigen.

5. Zuteilungsverfahren im Überblick: Systematik

Die systematische Einordnung der Verfahren wird einfacher, wenn man die Vielzahl bekannter Verfahren zu Gruppen zusammenfasst. Dabei lassen sich drei wesentliche Gruppen erkennen: Automatische Verfahren, Quotenverfahren und Divisorverfahren.

5.1. Automatische Verfahren

Ein einfacher Ansatz liegt darin, bereits vor der Zuteilung endgültig festzulegen, für wie viele Stimmen jeweils ein Sitz vergeben werden soll (sog. „Wahlzahl“). So enthält die Verfassung der USA eine Vorschrift, dass kein Bundesstaat im Repräsentantenhaus mehr als einen Sitz pro 30.000 Einwohnern erhalten soll. In der Frühzeit der USA wurde diese Klausel nicht nur als einseitige Schranke, sondern als konkrete Berechnungsvorschrift interpretiert: So wurde jeweils ein gewisser Wert der Wahlzahl (z.B. 33.000) gesetzlich festgelegt und die Zuteilung dann durchgeführt, indem die Bevölkerungszahl jedes Bundesstaates durch diesen Wert geteilt wurde. In Deutschland schrieb auch das Reichswahlgesetz¹⁸ der Weimarer Republik ein ähnliches Verfahren vor: Jeder Wahlvorschlag sollte pro 60.000 Stimmen je einen Abgeordnetensitz im Reichstag erhalten.

In der Folge stellt sich zunächst die bereits bekannte Frage nach dem Umgang mit Kommazahlen: Sollen Bruchteile von Sitzansprüchen berücksichtigt werden, oder lässt man im Extremfall bis zu 59.000 Wählerstimmen gänzlich unberücksichtigt? Die Weimarer Verfassung löste dieses Problem, indem solche „Reststimmen“ aus den einzelnen Wahlkreisen zunächst auf übergeordneter Ebene (Wahlkreisverbände) gesammelt wurden und dort, falls ihre Summe die Grenze von 60.000 Stimmen pro Partei überschritt, wiederum Anspruch auf einen weiteren Sitz begründeten. Auf Reichsebene wurde schließlich sogar ein „halber“ Anspruch (mind. 30.000 Stimmen) zu einem weiteren Sitz für den betreffenden Wahlvorschlag aufgerundet. Generell lassen sich automatische Verfahren mit jeder Form der Rundung (Abrundung, Aufrundung, Standardrundung, oder andere Rundungsvorschriften) kombinieren.

Ein anderes Problem wurde in der Frühzeit der USA wegen starker Zuwanderung und schnellen Bevölkerungswachstums erkennbar: Parallel zur Bevölkerung wuchs auch das Parlament „automatisch“ mit. In der Weimarer Republik trat der Effekt ebenfalls auf; hier schwankte die Anzahl der Reichstagsmitglieder zwischen 459 und 647. In Verhältniswahlssystemen hängt ein solcher

¹⁸ Reichswahlgesetz vom 27. April 1920, Artikel 30, vgl. <http://www.dhm.de/lemo/html/dokumente/wahlgesetz1920/index.html>

Zuwachs durch automatische Verfahren allerdings nicht nur vom Bevölkerungswachstum, sondern auch von der jeweiligen Wahlbeteiligung ab.

Nicht zuletzt dieser Punkt kann ein Parlament vor erhebliche logistische Herausforderungen stellen, denn gerade eine Wahlbeteiligung ist schwierig zu prognostizieren. Fällt sie unerwartet hoch aus, müssen nach der Wahl evtl. sehr kurzfristig Infrastruktur und finanzielle Mittel für eine große Zahl zusätzlicher Abgeordneter bereitgestellt werden. Fällt sie hingegen niedrig aus, kommen deutlich weniger Abgeordnete ins Parlament und es fehlen evtl. Spezialisten für politische Fachthemen.

Wohl auch aus solchen Gründen werden automatische Verfahren heute kaum mehr diskutiert. Die anderen beiden Hauptgruppen von Zuteilungsverfahren legen daher nicht die Wahlzahl, sondern die Gesamtzahl an zu verteilenden Sitzen vorab fest. Unvermeidlich wird so umgekehrt das Verhältnis von Stimmen zu Sitzen zur schwankenden Größe.

5.2. Quotenverfahren

Quotenverfahren gehen für jede Partei von ihrer Quote als wichtigster Bezugsgröße aus. Diese Quote wird berechnet, indem man die zu verteilende Gesamtsitzzahl mit dem Stimmenanteil der Partei multipliziert (also: Gesamtsitzzahl * Parteistimmen / Gesamtstimmen). Das Ergebnis, der Idealanspruch, ist eine Kommazahl. Deren ganzzahliger (abgerundeter) Anteil ist der Partei als Sitzzahl nun schon sicher – dies ist allen Quotenverfahren gemeinsam. Unterschiede treten im folgenden Schritt auf, bei dem Restsitze zu verteilen sind, bis die Gesamtsitzzahl stimmt. Diese Restsitzzuteilung kann man alternativ auch so auffassen, dass die Quoten der verschiedenen Parteien nach bestimmten Kriterien auf- statt abgerundet werden.

Das **Verfahren nach Hare/Niemeyer** („Quotenverfahren mit Restzuteilung nach größten Bruchteilen“) vergibt diese Restsitze an die Parteien mit den größten Nachkommanteilen ihrer Quoten¹⁹. Die Parteien werden also nach der Größe der Nachkommaanteile sortiert und erhalten in dieser Reihenfolge eine nach der anderen einen zusätzlichen Sitz zugeteilt – so lange, bis das Restsitzkontingent ausgeschöpft ist. In anderen Worten werden Quoten mit großen Bruchteilen aufgerundet, kleinere abgerundet – allerdings nicht mit einer festen Rundungsgrenze (etwa 0,50). Vielmehr ergibt die geeignete Rundungsgrenze sich erst im Verfahren selbst; sie hängt davon ab, wie groß die Quotenbruchteile nicht nur der einzelnen, sondern auch aller anderen Parteien jeweils sind.

¹⁹ D.h., anders formuliert, nach der größten Anzahl an Reststimmen.

Hare/Niemeyer ist das bei weitem bekannteste, aber nicht das einzige Quotenverfahren. Ein weiteres schlug W. Lowndes 1822 in den USA vor (Balinski/Young 1982, S. 24). Das nach ihm benannte „**Verfahren von Lowndes**“ beginnt wiederum mit der Berechnung der Quoten und der festen Vergabe der ganzzahligen Sitzanteile. Die nachfolgende Restsitzzuteilung richtet sich aber nicht nach der absoluten Größe der verbleibenden Sitzbruchteile, sondern nach relativen Bruchteilen: Zur Berechnung werden die genauen Quoten zunächst durch die in der ersten Runde vergebenen Sitzzahlen (also die abgerundeten Quoten) geteilt. Es ergibt sich für jede Partei eine Zahl, die in aller Regel knapp oberhalb von eins (z.B. 1,038) liegt. Diese Faktoren bedeuten anschaulich, „wie viel mal mehr“ Sitze eine Partei im Sinne strikter Proportionalität eigentlich bekommen müsste. Alternativ interpretiert legen die Faktoren eine gemeinsame Skala fest, auf der man ablesen kann, „wie viel mal mehr Wähler“ im Durchschnitt hinter einem Abgeordneten der einzelnen Partei stehen. Parteien mit besonders hohen Faktoren sind offenbar benachteiligt, denn sie haben mehr Wähler pro Sitz. Daher wird die Restsitzzuteilung in der Reihenfolge der höchsten Faktoren vorgenommen – wiederum bis das Restsitzkontingent ausgeschöpft ist.

5.3. Divisorverfahren

Die verbleibende Gruppe der **Divisorverfahren** weist die größte Vielfalt an verschiedenen Verfahren auf. Daneben kann jedes einzelne Divisorverfahren zusätzlich über unterschiedliche Berechnungsvorschriften definiert werden, die aber notwendigerweise zum identischen Berechnungsergebnis führen und insofern dasselbe Verfahren darstellen. Hier soll einheitlich zunächst die Darstellung als Zweischrittverfahren mit Divisoranpassung gewählt werden; alternative Formulierungsmöglichkeiten werden in Abschnitt 7.1 erläutert.

In dieser Darstellung funktionieren alle Divisorverfahren so, dass in einem ersten Schritt wiederum zunächst ein Sitzanspruch mit Kommastellen für jede Partei ausgerechnet wird. Dies kann auch hier nach der Formel „Gesamtsitze mal Parteistimmen geteilt durch Gesamtstimmen“ geschehen. Als Teil dieser Formel kann man das Verhältnis „Gesamtstimmen geteilt durch Gesamtsitze“ zu einem Wert („**Divisor**“) zusammenfassen. Die Anwendung der Formel für jede Partei reduziert sich dann darauf, die jeweilige Parteistimmenzahl durch den Divisor zu teilen. Anschaulich bestimmt der Divisor (wie die Wahlzahl beim automatischen Verfahren), wie viele Stimmen eine Partei im Mittel aufbringen muss, um einen Sitz zu erhalten.

Die so vorläufig errechnete Sitzzahl begründet aber, im Unterschied zu Quotenverfahren, noch keinerlei endgültigen Anspruch der jeweiligen Partei. Vielmehr werden die errechneten Kommazahlen zunächst nach einer (noch zu definierenden) Rundungsregel auf ganze Zahlen gerundet. Dann wird die Summe der Sitze aller Parteien gebildet. Stimmt sie nicht mit der zu vergebenden

Gesamtzahl an Sitzen überein, wird der **Divisor verändert** und mit dem neuen Divisor die Berechnung wiederholt. Dies geschieht so lange, bis die Summe stimmt. Wegen dieses vorläufigen Charakters der ersten Berechnung ist es nicht ausschlaggebend, dass das Verfahren tatsächlich mit dem oben genannten Wert des Divisors gestartet wird. Vielmehr kann auch ein beliebiger anderer Anfangswert genutzt werden, der – bei geschickter Wahl – evtl. schneller zum Abschluss des Verfahrens und zur richtigen Summe führt. Auch dieser „richtige“ Wert des Divisors ist allerdings meist nicht eindeutig definiert. Vielmehr führt meist ein ganzer Bereich von benachbarten Divisor-Werten (in der Praxis z.B. alle Werte zwischen 75.800 und 76.200) zum gleichen Ergebnis mit ganzzahligen Sitzzahlen und der richtigen Summe.

Der generelle **Unterschied zu Quotenverfahren** liegt also im Umgang mit dem Problem der anfänglich nicht „stimmenden“ Sitzzahl-Summe. Bei Quotenverfahren werden zwecks Vergabe von Restsitzen die Anforderungen für so viele Parteien individuell gelockert (indem ihr Sitzanspruch einzeln auf- statt abgerundet wird), bis die richtige Summe an Sitzen vergeben ist. Bei Divisorverfahren hingegen werden die Anforderung für alle Parteien gleichzeitig so gelockert bzw. verschärft, dass anhand dieses neuen Maßstabs – der Divisor beziffert die pro Sitz erforderlichen Stimmen– die Gesamtsitzzahl korrekt getroffen wird.

Der verbleibende Freiheitsgrad bei Divisorverfahren liegt in der Frage, welche **Rundungsvorschrift** anzuwenden ist. Da beliebige Rundungsregeln definiert werden können, existiert im Prinzip auch eine unendliche Fülle von unterschiedlichen Divisorverfahren. Allerdings erscheinen viele davon wenig überzeugend – insbesondere solche, die nicht nur zur nächsten, sondern z.B. gleich zur übernächsten ganzen Zahl auf- oder abrunden. Beschränkt man sich auf diejenigen Rundungsregeln, die nur auf die nächstliegenden ganzen Zahlen auf- oder abrunden, so kann man die entsprechenden Verfahren noch in solche **mit fester Rundungsgrenze** und solche **mit variabler Rundungsgrenze** unterscheiden. Feste Rundungsgrenze bedeutet, dass man eine Zahl so lange abrundet, wie ihr Nachkomma-Bruchteil unterhalb einer vorgegebenen Grenze bleibt, darüber hingegen aufrundet. Beispiele sind die **Aufrundung** (Rundungsgrenze 0,00), die **Standardrundung** (Grenze²⁰ 0,50) und die **Abrundung** (Grenze 0,999... bzw. 1,0). Variable Rundungsgrenze bedeutet, dass diese Trennlinie von der Größe der Zahl vor dem Komma abhängt: Bei der **geometrischen Rundung** bildet das jeweilige geometrische Mittel²¹ der zwei angrenzenden Zah-

²⁰ Dies entspricht dem **arithmetischen Mittel** der zwei angrenzenden Zahlen. Formal wird es berechnet, indem man die beiden Zahlen addiert und die Summe durch zwei teilt.

²¹ Das **geometrische Mittel** zweier Zahlen wird berechnet, indem man die beiden Zahlen miteinander multipliziert und aus dem Ergebnis die Wurzel zieht. Diese Form der Berechnung wird verwendet für die Mittelung von schwankenden Zinssätzen bei Kapitalanlagen, von Wachstumsraten bei Bakterienkulturen etc.

len die Rundungsgrenze (also die Zahlenfolge 1,41 – 2,45 – 3,46 – 4,47 – 5,48 – 6,48 etc.). Die **harmonische Rundung** orientiert sich schließlich am harmonischen Mittel²² der angrenzenden Zahlen (also der Zahlenfolge 1,33 – 2,40 – 3,43 – 4,44 – 5,45 – 6,46 etc). Beide Folgen nähern sich für große Zahlen immer mehr dem Bruchteil 0,50, werden also der Standardrundung immer ähnlicher. Für kleine Sitzzahlen können sich allerdings relevante Unterschiede ergeben.

Die genannten fünf Rundungsvorschriften sind dadurch ausgezeichnet, dass die zugeordneten Sitzzuteilungsverfahren oft als die **fünf traditionellen Divisorverfahren** bezeichnet werden: Abrundung führt zum Verfahren nach **D'Hondt**, Standardrundung zum Verfahren nach **Sainte-Laguë/Schepers**. Aufrundung entspricht dem Verfahren nach **Adams** (vorgeschlagen von US-Präsident John Quincy Adams; selten angewandt). Harmonische Rundung führt zum Verfahren nach **Dean**, das in der Praxis kaum genutzt wird. Geometrische Rundung schließlich entspricht dem Verfahren nach **Hill-Huntington**, das heute für die US-Kongresswahlen verwendet wird.

Die Zuteilungsergebnisse der drei Divisorverfahren mit Standardrundung, mit geometrischer Rundung und mit harmonischer Rundung können sich wegen der o.g. fortschreitenden Annäherung der Rundungsgrenzen vor allem bei kleinen absoluten Sitzzahlen merklich unterscheiden. Dies ist in den USA relevant, wo es sehr kleine Bundesstaaten gibt, die nur einzelne Sitze im Repräsentantenhaus erhalten. Im deutschen Wahlsystem sind die Unterschiede insofern weniger bedeutsam, als die 5%-Hürde dafür sorgt, dass eine Partei kaum weniger als 30 Sitze erhalten kann, wenn sie überhaupt im Bundestag vertreten ist. Daher ergeben hier alle drei Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers, nach Dean und nach Hill-Huntington **oft das gleiche Ergebnis**. Am Beispiel der vergangenen Bundestagswahlen stellt sich bei den berechneten Zuteilungsergebnissen in keinem einzigen Fall ein Unterschied zwischen den drei Verfahren heraus (vgl. Anhang, S. 43).

Auch wenn den fünf traditionellen Divisormethoden die größte Bedeutung zukommt, existieren **unzählige weitere Divisorverfahren**, darunter einige bekanntere. So schlug der Marquis de Condorcet zur Zeit der Französischen Revolution ein Divisorverfahren mit einer festen Rundungsgrenze von 0,40 vor (Verfahren nach Condorcet).

²² Das **harmonische Mittel** zweier Zahlen ergibt sich, indem man die Kehrwerte beider Zahlen berechnet, das (arithmetische) Mittel dieser Werte bildet und vom Ergebnis wiederum den Kehrwert nimmt. Dasselbe Ergebnis kann man auch berechnen, indem man beide Zahlen miteinander multipliziert und dann durch ihr arithmetisches Mittel teilt.
Einfaches Anwendungsbeispiel: Ein Fahrradfahrer fährt dieselbe Strecke hin und zurück – auf dem Hinweg bei Gegenwind langsamer, auf dem Rückweg bei Rückenwind schneller. Dann entspricht die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Reise dem harmonischen Mittel der beiden einzelnen Geschwindigkeiten.

Kopfermann (1991) nennt schließlich weitere Gruppen von Verfahren (Komplementärverfahren, Exponentialverfahren, allgemeine Proportionalverfahren), denen jedoch in der Praxis eine geringere Bedeutung zukommt.

6. Quotenverfahren im Einzelnen: Eigenschaften

Das Quotenverfahren nach Hare/Niemeyer hat eine bedeutende Rolle in der Entwicklung der Zuteilungsverfahren gespielt. Wie dieses haben alle Quotenverfahren mehrere günstige mathematische Eigenschaften. Einerseits wirken sie relativ einfach und verständlich; auch sind die erforderlichen Berechnungen mit einfachen Mitteln meist schnell durchzuführen. Weiterhin erfüllen sie automatisch die Quotenbedingung: Schon aus der Definition der Verfahren folgt, dass keine Partei weniger Sitze als ihre abgerundete Quote oder mehr Sitze als ihre aufgerundete Quote erhalten kann. Die Proportionalität ist also in relativ strengem Sinne gewahrt. Schließlich ist zumindest das Verfahren nach Hare/Niemeyer parteigrößen-neutral: Die Vergabe von Restsitzen geschieht hier nur nach dem Quoten-Bruchteil – unabhängig von der Zahl vor dem Komma, an der sich die Parteigröße ablesen lässt. Daher kann keine Partei allein aufgrund ihrer Größe einen statistischen Vorteil oder Nachteil bei der Vergabe der Restsitze erleiden.

Diesen Vorteilen steht allerdings ein gewichtiger Nachteil gegenüber: Quotenverfahren können die Monotonie bzw. die Konsistenz verletzen. Dies kann auf mehrere Weisen geschehen. Die entsprechenden Effekte, die im 19. Jahrhundert in den USA entdeckt wurden, werden als **Paradoxien** bezeichnet.

Der Begriff „**Alabama-Paradoxon**“ (auch: Sitzzuwachsparadoxon) bezeichnet eine Verletzung der Haus-Monotonie: Bei Quotenverfahren wie Hare/Niemeyer kann es vorkommen, dass bei feststehender Stimmenzahl eine Erhöhung der Parlamentsgröße um einen Sitz dazu führen würde, dass eine Partei einen Sitz verliert (oder dass eine Partei umgekehrt bei Verkleinerung des Parlaments einen zusätzlichen Sitz zugeteilt bekäme). Dieses Phänomen wurde 1880 bei der Verteilung der Kongress-Sitze auf die US-Bundesstaaten beobachtet (vgl. Balinski/Young 1982, S. 39):

Bundesstaat	Einwohnerzahl	Quote (299 Sitze)	Quote (300 Sitze)
Alabama	1.262.505	7,646	7,671
Texas	1.591.749	9,640	9,672
Illinois	3.077.871	18,640	18,702
...			
USA gesamt	49.371.340	299	300

Tabelle 6: Historisches Zahlenbeispiel zum Alabama-Paradoxon. Der Staat Alabama fällt um einen Sitz zurück, obwohl die Gesamtzahl der Sitze um einen erhöht wurde (vgl. Balinski/Young 1982, S. 39).

Das Beispiel zeigt: Wäre damals die Größe des US-Repräsentantenhauses auf 299 Sitze festgelegt worden, hätte der Quoten-Bruchteil für den Staat Alabama bei 0,646 und damit höher als diejeni-

gen von Texas und Illinois gelegen; Alabama wären daher 8 Mandate zugeteilt worden. Würde hingegen die Hausgröße auf 300 erhöht, zwar auch der Bruchteil von Alabama auf 0,671 ansteigen. Die Bruchteile der (größeren) Bundesstaaten Texas und Illinois stiegen jedoch noch stärker auf 0,672 bzw. 0,702. Sie zögen daher in der Bruchteils-Reihenfolge an Alabama vorbei und erhielten noch vor diesem Staat Restsitze zugeteilt. Alabama fiel so auf nur noch 7 Mandate zurück – obwohl die Gesamtgröße des Parlaments erhöht worden war.

Der Begriff „**new state-Paradoxon**“ (Parteizuwachsparadoxon) wurde geprägt, nachdem der Staat Oklahoma 1907 den USA beitrug. Gemäß seiner Bevölkerungszahl war unstrittig, dass er fünf Sitze im Repräsentantenhaus erhalten sollte, das entsprechend von 386 auf 391 Sitze vergrößert wurde. Eine Neuberechnung der Verteilung für alle Bundesstaaten ließ in der Folge jedoch klar werden, dass das Verfahren nach Hare/Niemeyer in diesem Fall zu einer Sitzverschiebung zwischen zwei anderen US-Staaten führte (ein Sitz von New York zu Maine). Dies geschah allein durch das Hinzutreten eines neuen Staates, obwohl sich die Zahlenverhältnisse zwischen den beiden betroffenen älteren Staaten in keiner Weise verändert hatten.

Vor Beitritt Oklahoma	Einwohnerzahl	Quote/Sitze
New York	7.264.183	37,606
Maine	694.466	3,595
USA gesamt	74.562.608	386
Nach Beitritt		
Oklahoma	ca. 1.000.000	5,175
New York	7.264.183	37,589
Maine	694.466	3,594
USA gesamt	75.562.608	391

Tabelle 7: Historisches Zahlenbeispiel zum new-state-Paradoxon. Nach dem Beitritt des Bundesstaates Oklahoma verschiebt sich ein Sitz von New York zu Maine, obwohl beider Bevölkerungen unverändert sind (vgl. Balinski/Young 1982, S. 44).

Das „**Bevölkerungs-Paradoxon**“ (Wählerzuwachs-Paradoxon) kann schließlich auftreten, wenn die Wählerzahlen von Parteien oder Bundesstaaten unterschiedlich schnell wachsen. Um 1900 wiesen viele US-Bundesstaaten ein Bevölkerungswachstum auf, jedoch mit unterschiedlichen Zuwachsraten: So wuchs Virginia pro Jahr um 1,07%, Maine nur um 0,67%. Vor dem Hintergrund eines höheren Wachstum der gesamten USA (im Mittel 2,02%) führte dies beim Quotenverfahren nach Hare/Niemeyer dazu, dass Virginia einen Sitz verlor (von 10 auf 9), den Maine übernehmen konnte (von 3 auf 4) – obwohl Maine noch langsamer wuchs als Virginia (Tabelle 8).

Die drei Phänomene zeigen, dass es bei Quotenverfahren wie Hare/Niemeyer zu Effekten kommen kann, die der Monotonie, der Gleichheit der Wahl und dem gesunden Menschenverstand

offensichtlich widersprechen. Letztlich liegt dies daran, dass bei Veränderung der Randbedingungen (Gesamtzahl an Sitzen oder Parteien/Staaten) der Quoten-Bruchteil einer Partei hinter dem Komma umso schneller wächst oder schrumpft, je größer die absolute Größe dieser Partei ist. Dies kann bei knappen Verhältnissen dazu führen, dass die Bruchteile in unvermuteter Weise über oder unter die Rundungs-Schwelle rutschen, woraus sich die obigen Paradoxien ergeben.

Bundesstaat	Einwohnerzahl 1900	Quote/Sitze
Virginia	1.854.184	9,599
Maine	694.466	3,595
USA gesamt	74.562.608	386
Einwohnerzahl 1901		
Virginia	1.873.951	9,509
Maine	699.114	3,548
USA gesamt	ca. 76.069.000	386

Tabelle 8: Historisches Zahlenbeispiel zum Bevölkerungs-Paradoxon: Im Zuge des Bevölkerungswachstums verschiebt sich ein Sitz von Virginia zu Maine, obwohl Virginia schneller wächst als Maine (vgl. Balinski/Young 1982, S. 43)

Paradoxien sind dann besonders gravierend, wenn die Zahl der Parteien (bzw. Staaten) und/oder die Gesamtzahl der zu verteilenden Sitze nicht konstant, sondern während des Zuteilungsprozesses noch veränderlich sind – dann könnten sie Raum für manipulatives Eingreifen bieten. Übertragen auf Deutschland mögen sie daher insofern weniger bedrohlich wirken, als die Zahl der Bundestags-Parteien zumindest konstanter ist als die Zahl der US-Bundesstaaten es früher war. Auch ist die regulär zu vergebende Sitzzahl im Zuteilungsverfahren nicht mehr veränderbar, sondern steht vor der Wahl fest. Bei der späteren Besetzung der Ausschüsse im neu gewählten Bundestag gilt dies jedoch nicht im gleichen Maße, da Ausschussgrößen wesentlich stärker fluktuieren.

Auch wenn das mögliche Auftreten von Paradoxien als Nachteil von Quotenverfahren gegen mehrere Vorteile dieser Verfahren abzuwägen ist, tendieren viele Beobachter dazu, den Nachteil für sehr gewichtig und Quotenverfahren deshalb generell für unvorteilhaft zu halten. Dementsprechend haben der US-Kongress (1910) und der Bundestag (2008) das Quotenverfahren nach Hare/Niemeyer aufgegeben.

7. Divisorverfahren im Einzelnen: Varianten und Eigenschaften

In diesem Kapitel sollen nun Divisorverfahren im Detail dargestellt werden. Es geht dabei in Abschnitt 7.1 zunächst um Möglichkeiten, dasselbe Divisorverfahren in unterschiedlichen Darstellungs-Varianten mathematisch zu formulieren, bevor Abschnitt 7.2 die Eigenschaften (Vor- und Nachteile) von Divisorverfahren zusammenfasst.

Zwar wurden Divisorverfahren zuvor bereits in Kapitel 3 (mit praktischer Berechnungsvorschrift und Zahlenbeispielen) und in Abschnitt 5.3 (mit einem Überblick über die gesamte Breite der möglichen Divisorverfahren) diskutiert. Leser, die primär an einer praktischen Anwendung der Verfahren interessiert sind, können das nun folgende Kapitel daher evtl. überspringen. Zum tieferen Verständnis von Divisorverfahren ist die Kenntnis alternativer Darstellungsformen dennoch nützlich, aus zwei Gründen: Erstens erleichtert sie die Wiedererkennung, wenn dieselben Verfahren in der Literatur teils sehr unterschiedlich formuliert werden. Zweitens macht jede der unterschiedlichen Darstellungsformen bestimmte mathematische Eigenschaften der Verfahren besonders leicht erkennbar; Abschnitt 7.1 dient insofern der Vorbereitung von Abschnitt 7.2.

7.1. Alternative Darstellungsformen

In Abschnitt 5.3 wurden die traditionellen Divisorverfahren in ihrer Variante als Zweischrittverfahren mit Divisor-Anpassung dargestellt. Alle diese Verfahren können alternativ über mehrere andere Formulierungen²³ definiert werden. Die mathematische Äquivalenz der unterschiedlichen Formulierungen kann hier nur ohne Beweis wiedergegeben werden; Details dazu finden sich im mathematischen Anhang des Buches von Balinski/Young (1982).

7.1.1. Formulierung als Höchstzahlverfahren bzw. Rangmaßzahlverfahren

Alle Divisorverfahren können so formuliert werden, dass sie die Gesamtzahl der zur Verfügung stehenden Sitze einzeln nacheinander vergeben („inkrementelles“ Verfahren). Am Beispiel des Verfahrens nach D’Hondt lässt sich dies besonders einfach in einem Satz formulieren: Die Sitze werden einer nach dem anderen verteilt, wobei jeweils diejenige Partei den nächsten Sitz erhält, die dann immer noch den schlechtesten Erfolgswert für ihre Wählerstimmen erzielt²⁴.

²³ Weil diese Formulierungen zu identischen Berechnungsergebnissen kommen, sind sie gemäß Bundeswahlleiter auch rechtlich gleichwertig – vgl. http://www.bundeswahlleiter.de/de/aktuelle_mitteilungen/downloads/Kurzdarst_Sitzzuteilung.pdf

²⁴ Dieses Verfahren stützt sich also im nächsten Schritt immer auf die Ergebnisse des jeweils vorhergehenden; es wird daher auch als „rekursives“ Verfahren bezeichnet.

Schon an dieser kompakten Formulierung ist eine wichtige Eigenschaft aller Höchstzahlverfahren ablesbar: Die Verfahrensvorschrift sieht nur die Verteilung zusätzlicher Sitze vor, nicht jedoch deren Entzug. Es kann daher nicht vorkommen, dass eine Partei bei Parlamentsvergrößerung einen Sitz verliert. Somit erfüllen alle Höchstzahlverfahren (d.h. alle Divisorverfahren) automatisch das Kriterium der Haus-Monotonie.

Für die Ableitung praktisch nutzbarer Berechnungsvorschriften für alle Divisorverfahren muss das Vorgehen etwas ausführlicher beschrieben werden: Um zu entscheiden, welche Partei den jeweils nächsten Sitz erhalten soll, wird eine Tabelle mit Koeffizienten aufgestellt. Die Tabelle wird gefüllt, indem anfänglich eine Zahlenfolge von Teilern definiert und sodann die Stimmenzahl jeder Partei nacheinander durch jede dieser Zahlen geteilt wird. Dann wird die Gesamtheit aller so errechneten Koeffizienten gemeinsam betrachtet und quer über die Tabelle nach Größe sortiert. Daraus ergibt sich die Reihenfolge der zu vergebenden Parteisitze. Die Koeffizienten werden auch als „Höchstzahlen“ bezeichnet, daher der Name „**Höchstzahlverfahren**“.

Die verschiedenen Divisorverfahren unterscheiden sich allein in der Wahl der Teilerfolge. Im Beispiel des **D'Hondtschen Verfahrens als Höchstzahlverfahren** ist diese besonders einfach: Es sind die natürlichen Zahlen (1 – 2 – 3 – 4 etc.). Werden die Wählerstimmen jeder Partei nacheinander durch diese Zahlen geteilt, so entspricht jeder einzelne Koeffizient der Anzahl an Wählerstimmen, die hinter jedem Sitz der Partei stünden, wenn diese den entsprechenden Teiler als Sitzzahl zugewiesen bekäme. Die Tabelle ist demnach eigentlich eine Tabelle von (hypothetischen) Vertretungsgewichten. Wird der jeweils nächste Sitz an die Partei (A) mit dem höchsten verbleibenden Koeffizienten vergeben, dann erhält ihn somit die Partei, die nach dieser Zuteilung immer noch das höchste Vertretungsgewicht hat. Hätte ihn stattdessen Partei B erhalten, so wäre deren Vertretungsgewicht weiter reduziert worden, während das von Partei A weiterhin und unnötig hoch bliebe. Das D'Hondtsche Verfahren reduziert also im Laufe der Zuteilung die Vertretungsgewichte der Mandate bei allen Parteien möglichst gleichmäßig; keine Partei bekommt einen Sitz „zu billig“ (d.h. gegen zu geringes Vertretungsgewicht). Mathematisch ausgedrückt: Das Verfahren maximiert die minimalen Vertretungsgewichte.

Andere Divisorverfahren ergeben sich nach der gleichen Systematik, indem man andere Teilerfolgen wählt. Diese entsprechen genau den Rundungsgrenzen in der jeweiligen Variante als Zweischnittverfahren mit Divisoranpassung: Die Folge 0,5 – 1,5 – 2,5 – 3,5 etc. führt zum **Verfah-**

ren nach Sainte-Laguë/Schepers. Die Folge $0 - 1 - 2 - 3$ etc. entspricht **Verfahren nach Adams**²⁵. Das **Verfahren nach Dean** ist definiert über die Teilerfolge $1,41 - 2,45 - 3,46 - 4,47 - 5,48 -$ etc., während die Folge $1,33 - 2,40 - 3,43 - 4,44 - 5,45 -$ etc. zum **Verfahren nach Hill-Huntington** führt. Die Durchführung des Höchstzahlverfahrens ist mit diesen Teilerfolgen ebenso einfach wie bei D'Hondt, allerdings haben die sich ergebenden Höchstzahlen keine ebenso anschauliche Bedeutung wie zuvor als Vertretungsgewichte.

Eng verbunden mit den Höchstzahlverfahren ist die alternative Formulierung als **Rangmaßzahlenverfahren**²⁶. Dabei wird jeweils die umgekehrte Division durchgeführt, also die Elemente der Zahlenfolgen nacheinander durch die Wählerstimmenzahl der jeweiligen Partei geteilt. Als Koeffizienten in der Tabelle ergeben sich daraus mathematisch die Kehrwerte der Höchstzahlen; diese Werte werden statt in absteigende in aufsteigende Reihenfolge gebracht. Das Zuteilungsergebnis ist identisch mit dem des entsprechenden Höchstzahlverfahrens. Im Fall von D'Hondt ist auch die Interpretation ebenso anschaulich: statt nach höchstem Vertretungsgewicht wird nach bisher geringstem Erfolgswert zugeteilt. Der Unterschied liegt allein in der Formulierung, nicht im Ergebnis.

7.1.2. Formulierung über paarweisen Vergleich

Eine weitere Alternative stellt die Formulierung der Zuteilungsvorschrift über paarweisen Vergleich dar: Ausgehend von einer (im Prinzip beliebig wählbaren) Anfangsverteilung wird jeweils ein Paar von zwei der beteiligten Parteien herausgegriffen und in Bezug darauf verglichen, ob die Sitzverteilung zwischen diesen beiden vor dem Hintergrund ihrer jeweiligen Wählerstimmen gerechtfertigt erscheint. Falls nicht, werden Sitze zwischen diesen beiden Parteien verschoben, bis das Ergebnis „gerecht“ wirkt. Ebenso werden alle weiteren Zweierkombinationen von Parteien wiederholt behandelt, bis am Ende jeder mögliche Vergleich beliebiger Parteienpaare befriedigend ausfällt und keine Verbesserungsmöglichkeit mehr existiert.

An dieser Formulierung kann eine weitere Eigenschaft der Divisorverfahren unmittelbar abgelesen werden: Da hier paarweise Vergleiche ausschlaggebend sind, kann ein relativer Stimmengewinn einer Partei gegenüber einer anderen nicht dazu führen, dass diese Partei im (paarweisen) Vergleich zur anderen Sitze verliert. Divisorverfahren erfüllen somit das Kriterium der Bevölkerungs-Monotonie.

²⁵ Das Teilen durch Null, mathematisch nicht erlaubt bzw. unendlich, bedeutet hier, dass das Ergebnis „größer als alle anderen Höchstzahlen“ sein soll. Daher erhalten zunächst alle Parteien nacheinander jeweils einen Sitz, bevor die verbleibenden Höchstzahlen zum Zuge kommen.

²⁶ Siehe ausführliche Darstellung unter www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse/azur/azur_3.html

Eine denkbare Schwierigkeit bei der Durchführung liegt darin, dass der paarweise Vergleich möglicherweise nie zum Ende kommen könnte, sondern sich „im Kreis drehen“ würde. Das ist jedoch zumindest dann nicht der Fall, wenn das Kriterium für „gerechten“ Vergleich geeignet gewählt wird (vgl. Balinski/Young 1982, S. 101-102).

In diesem Vergleichskriterium unterscheiden sich die Verfahren; der Vergleichsmaßstab definiert sozusagen das einzelne Divisorverfahren. Eine naheliegende Wahl dieses Kriteriums besteht darin, immer dann jeweils einen Sitz zu verschieben, wenn dadurch der absolute Unterschied der Erfolgswerte (Sitze pro Stimme) der Wählerstimmen beider Parteien verringert werden kann. Diese spezielle Wahl führt zum Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers. Nicht weniger naheliegend ist die Strategie, immer dann einen Sitz zu verschieben, wenn so der absolute Unterschied in den Vertretungsgewichten (Stimmen pro Sitz) beider Parteien reduziert wird. Dies führt zu einem anderen Divisorverfahren, nämlich dem von Dean. Beide Kriterien erscheinen gleichermaßen plausibel; die Auswahl kann daher schwer fallen. Das Verfahren nach Hill-Huntington verfolgt einen allgemeineren Ansatz, der als einer der Vorzüge dieses Verfahrens betrachtet werden kann: Es minimiert statt der absoluten die relativen Unterschiede zwischen den beiden Parteien. Dabei ist es mathematisch gleichgültig, ob die relativen Unterschiede der Erfolgswerte oder der Vertretungsgewichte gemeint sind. Schließlich sind auch die Verfahren nach Adams und nach D’Hondt über paarweisen Vergleich definierbar, allerdings mit geringfügig komplizierteren Vergleichskriterien²⁷ (vgl. Balinski/Young 1982, S. 102).

7.1.3. Formulierung als Minimierung einer Zielfunktion

Divisormethoden können als weitere grundsätzliche Alternative auch über die Optimierung einer Zielfunktion formuliert werden (vgl. Balinski/Young 1982, S. 102-105). Vereinfacht besteht das Ziel darin, die jeweiligen Abweichungen zwischen der konkreten Sitzzuteilung in den Idealansprüchen der Parteien im Sinne strikter Proportionalität so gering wie möglich zu halten. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Divisorverfahren spiegeln dann letztlich die Tatsache wider, dass diese Abweichungen auf verschiedene Weise gemessen werden können. Beispielsweise können entweder die Abweichungen vom Idealanspruch im Durchschnitt über alle beteiligten Parteien berechnet werden, oder es wird lediglich der extreme Unterschied zwischen den beiden am stärksten abweichenden Parteien betrachtet und so weit wie möglich verringert.

²⁷ Dabei wird die Sitzzahl der einen Partei über das Verhältnis der Stimmenzahlen skaliert und danach mit der Sitzzahl der anderen Partei verglichen.

Die Optimierung erfolgt dabei nicht nur nach Maßgabe der Zielfunktion, sondern unter weiteren Randbedingungen: Insbesondere müssen die Sitzansprüche wieder ganze Zahlen darstellen. Darüber hinaus können Mindest- oder Höchstgrenzen für die zulässigen Ansprüche aller Parteien berücksichtigt werden, so wie etwa im US-Repräsentantenhaus jedem Staat mindestens ein Sitz garantiert ist. Der Vorteil der Formulierung über die Optimierung einer Zielfunktion liegt u.a. darin, dass die Sitzzuteilung so Anschluss erhält an Berechnungsmethoden, die u.a. in Technik, Naturwissenschaften und Betriebswirtschaft weit verbreitet sind („constrained optimization“). Ein weiterer Vorzug liegt darin, dass der Betrachter anhand der Zielfunktion unmittelbar erfassen kann, welches Kriterium als oberste Richtschnur des Verfahrens dient.

Der einfachste Ansatz, als zu minimierende Zielfunktion die Abweichung des jeweiligen Sitzanspruchs vom Idealanspruch (der Quote) über alle Parteien zu mitteln (sei es regulär oder, wie in der Mathematik üblich, quadriert), führt zum Verfahren nach Hare/Niemeyer. Dies überrascht wenig, da die Quote bereits als wichtigste Bezugsgröße dieses Verfahrens identifiziert wurde; es minimiert im Ergebnis auch die Abweichungen von ihr. Hare/Niemeyer ist allerdings kein Divisorverfahren, sondern ein Quotenverfahren. Dies zeigt, dass das Konzept der Minimierung einer Zielfunktion nicht nur zur Beschreibung von Divisorverfahren geeignet ist, sondern übergeordnete Bedeutung hat.

Divisorverfahren definieren sich über unterschiedliche Zielfunktionen: Das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers minimiert die mittlere quadratische Abweichung der Erfolgswerte vom durchschnittlichen Verhältnis Sitze/Stimmen, wobei diese Abweichungen allerdings mit den Stimmzahlen gewichtet werden: Niedrige Erfolgswerte fallen also bei den Wählern großer Parteien relativ stärker ins Gewicht als bei kleinen, weil größere Wählerzahlen unter ihrem (gemeinsam niedrigen) Erfolgswert sozusagen stärker leiden. Werden hingegen die einzelnen Vertretungsgewichte mit dem durchschnittlichen Verhältnis Stimmen/Sitze verglichen und die dabei auftretenden (quadratischen) Abweichungen mit der jeweiligen Zahl der Abgeordneten einer Partei gewichtet, die sozusagen gemeinsam unter einem besonders hohen oder niedrigen Vertretungsgewicht leiden, dann führt die Minimierung der so definierten Zielfunktion zum Verfahren nach Hill-Huntington.

Beide Vorgehensweisen minimieren ein (gewichtetes) Mittel der Abweichungen über alle Parteien. Allerdings wäre es sicher unschön, wenn dieses Ziel erreicht werden könnte, indem viele Parteien besser (oder schlechter) als nötig behandelt werden, während eine weitere besonders benachteiligt (oder bevorzugt) wird. Man kann daher auch anders vorgehen, indem man nur die Extreme individuell betrachtet: Wird die Verteilung so gestaltet, dass das Vertretungsgewicht der

Mandate derjenigen Partei mit dem niedrigsten Vertretungswert immerhin noch so hoch wie irgend möglich ausfällt, so entspricht dies dem Verfahren nach D'Hondt (äquivalent zu dieser Maximierung des minimalen Vertretungsgewichts ist die Minimierung des maximalen Erfolgswerts). Soll umgekehrt das Vertretungsgewicht der Partei mit dem höchsten Vertretungsgewicht zumindest so niedrig wie irgend möglich ausfallen, dann wird dies durch das Verfahren nach Adams realisiert.

7.2. Eigenschaften und mathematische Aussagen zu Divisorverfahren

Divisorverfahren haben eine Vielzahl von Eigenschaften, die sie mathematisch interessant machen. Diese werden hier nur in Kurzform und ohne Beweis wiedergegeben; die entsprechenden Beweise sind im mathematischen Anhang des Buches von Balinski/Young (1982) nachzulesen.

- Alle Divisorverfahren erfüllen das Kriterium der **Bevölkerungs-Monotonie**. Nur Divisorverfahren erfüllen dieses Kriterium, sind also als einzige konsistent bzw. kohärent (d.h. frei vom Wählerzuwachs-Paradoxon).
- Generell folgt aus der Bevölkerungs-Monotonie automatisch auch die **Haus-Monotonie**. Alle Divisorverfahren sind daher haus-monoton (d.h. frei vom Alabama-Paradoxon).
- Gemäß dem Unmöglichkeitssatz von Balinski/Young können Divisorverfahren demnach die **Quotenbedingung nicht erfüllen**. Alle Divisorverfahren verletzen sie (manchmal).
- Allerdings verletzen nicht alle Divisorverfahren die Quotenbedingung in gleicher Weise. Das Verfahren nach D'Hondt verletzt sie **nur nach oben**, das Verfahren nach Adams verletzt sie **nur nach unten**.
- Alle anderen Divisorverfahren können die Quotenbedingung **in beide Richtungen** verletzen. Allerdings kommt das nie in derselben Zuteilung vor: Innerhalb eines Sitzzuteilungsergebnisses kann kein Divisorverfahren die Quote einer Partei nach oben und gleichzeitig die einer anderen Partei nach unten verletzen.
- Das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers **kommt der Quotenbedingung** zumindest **nahe** (vgl. S. 21).
- Das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers verhält sich zudem in Bezug auf die **Parteigröße neutral**. Dies folgt sowohl aus der mathematischen Theorie als auch aus der statistischen Auswertung der Berechnungsergebnisse für US-Zuteilungen nach allen fünf traditionellen Verfahren. Alle anderen Divisorverfahren verschaffen entweder großen oder kleinen Parteien zu einem systematischen Vorteil (in unterschiedlicher Höhe).

8. Fazit

Die obige Darstellung hat gezeigt, dass das Problem der Sitzzuteilung auf viele verschiedene Arten gelöst werden kann, die jeweils unterschiedliche Vor- und Nachteile haben. Quotenverfahren wie das Verfahren nach Hare/Niemeyer erfüllen die Quotenbedingung, die einen wichtigen (wenn auch nicht den einzig möglichen) Indikator für die Proportionalität des Verfahrens darstellt. Sie können jedoch zu Paradoxien führen. Divisorverfahren hingegen sind generell frei von solchen Paradoxien. Umgekehrt können alle Divisorverfahren die Quotenbedingung verletzen. Da sich bei Divisorverfahren jedoch keinesfalls die Sitzzahlen gegenläufig zu den Stimmzahlen entwickeln können (Kriterium der Bevölkerungs-Monotonie bzw. der Konsistenz oder Kohärenz), erfüllen sie gleichzeitig einen anderen Aspekt der Proportionalität.

Die Suche nach weiteren Verfahren, die evtl. beide Vorteile miteinander kombinieren, ist vergeblich. Der Unmöglichkeitssatz von Balinski und Young trifft die mathematische Aussage, dass kein denkbare Verfahren die Quotenbedingung und das Kriterium der Bevölkerungs-Monotonie gleichzeitig erfüllen kann. Es ist daher unvermeidlich, Kompromisse zu schließen bzw. unter den konkurrierenden mathematischen Anforderungen an ein Sitzzuteilungsverfahren Prioritäten zu setzen.

Vieles spricht dafür, dass das Kriterium der Konsistenz höher gewichtet, d.h. die Auswahl der Verfahren auf die Kategorie der Divisorverfahren beschränkt werden sollte. Innerhalb dieser Kategorie unterscheiden sich die traditionellen Verfahren primär im Hinblick auf die Bevorzugung großer oder kleiner Parteien. Will man großen Parteien einen systematischen Vorteil gewähren, etwa um einer Zersplitterung des Parteienspektrums vorzubeugen und/oder um Regierungsmehrheiten stabiler zu machen, bietet sich das Verfahren nach D'Hondt an. Rechenbeispiele zu vergangenen Bundestagswahlen (Anhang, Abschnitt 9) zeigen jedoch, dass letzteres Ziel nicht immer erreicht wird, weil die Umverteilung von klein zu groß innerhalb derselben Koalition, ja teils innerhalb derselben Fraktion (von CSU zu CDU) geschieht. Will man hingegen ein Parteigrößen-neutrales Verfahren nutzen, so bietet sich das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers an. Nach der mathematischen Theorie wie aufgrund zahlreicher Beispielrechnung aus der deutschen und amerikanischen Wahl-Geschichte lässt es sich als dasjenige Divisorverfahren identifizieren, das die strikteste Neutralität in Bezug auf Parteigrößen erreicht.

Die Wahlrechts-Reform des Jahres 2008, bei der der Bundestag das Quotenverfahren nach Hare/Niemeyer aufgegeben und stattdessen das Divisorverfahren nach Sainte-Laguë/Schepers im Bundeswahlgesetz festgeschrieben hat, wirkt insofern gut begründet. Für die wegen des Urteils des Bundesverfassungsgerichts anstehende nächste Reform, mit der der Effekt des negativen

Stimmgewichts beseitigt werden soll, bietet es sich daher an, beim Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers zu bleiben (falls nicht, jenseits von Sitzzuteilungsverfahren, eine Umstellung auf ein gänzlich anderes Wahlsystem angestrebt wird, etwa ein reines Mehrheitswahlrecht oder ein „Grabenwahlsystem“). Dabei müsste nicht das „reine“ Divisorverfahren, sondern ein solches mit Mindest-Grenzen eingeführt werden: Bei der Untertzuteilung würde dann jede Landesliste mindestens so viele Listenplätze zugewiesen bekommen, wie sie zuvor Direktmandate errungen hat. Dieses modifizierte Divisorverfahren mag vor dem Erfahrungshintergrund der deutschen Wahlrechts-Tradition ungewohnt wirken, ist jedoch mathematisch wenig problematisch. Mindest-Grenzen bei Divisorverfahren sind in den USA seit 200 Jahren erprobt, da nach der US-Verfassung jeder Bundesstaat mindestens einen Sitz im Repräsentantenhaus garantiert erhält. Auch für eine Anwendung in Deutschland ist der Vorschlag nicht ganz neu: Bereits 1982 wurde von Mathematikern vorgeschlagen, dass ein solches Zuteilungsverfahren das deutsche föderale Wahlsystem mit seinen Direkt- und Listenmandaten noch besser als bisher mit dem Gedanken der Proportionalität in Übereinstimmung bringen könnte (Balinski/Young 1982, S. 92-93).

Folgt man dieser Logik, dann bleibt zusätzlich noch die Wahl der Darstellungsform des bevorzugten Divisorverfahrens. Seit März 2008 ist im Bundeswahlgesetz die Formulierung des Divisorverfahrens nach Sainte-Laguë/Schepers in der Variante als iteratives Verfahren mit Divisoranpassung festgeschrieben. Die gleiche Formulierung enthielt auch der im Juli abgelehnte Gesetzentwurf der Fraktion Bündnis 90/Die Grünen vom Februar 2009, der das negative Stimmgewicht abschaffen sollte. Diese Formulierungsvariante bietet Vorteile für die praktische Umsetzung der Berechnung per Computer, kann aber das Verständnis des Gesetzestextes gerade für Laien tendenziell erschweren. Die Alternative läge in der Formulierung als (mathematisch äquivalentes) Höchstzahlverfahren, wiederum mit Mindest-Grenzen. Ein entsprechender Vorschlag wurde im Zuge der Expertenanhörung zur Wahlgesetz-Reform im Bundestags-Innenausschuss am 4. Mai 2009 von den Sachverständigen W. Zicht und F. Pukelsheim vorgelegt. Die Stellungnahmen²⁸ machen deutlich, dass damit die Textlänge der Verfahrensvorschrift verkürzt und die Normenklarheit und Verständlichkeit erhöht werden könnten.

²⁸ www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse/a04/anhoerungen/Anhoerung_20/Stellungnahmen_SV/index.html

9. Anhang: Beispielrechnungen für vergangene Bundestags-Wahlen

Im Folgenden sollen die zuvor diskutierten mathematischen Eigenschaften der verschiedenen Sitzzuteilungsverfahren anhand von konkreten Berechnungen anschaulich illustriert werden. Als Zahlenmaterial dienen die Stimmenergebnisse vergangener Bundestagswahlen. Daran kann grob abgeschätzt werden, welche Relevanz die allgemeinen Erkenntnisse zu mathematischen Verfahrenseigenschaften für die Verhältnisse auf Bundesebene in Deutschland haben. Allerdings hat dies nur rein exemplarischen Charakter, denn bei jeder zukünftigen Wahl können sich neue Konstellationen ergeben und dabei auch andere Verfahrenseigenschaften stärker in den Vordergrund rücken.

Die Wahlergebnisse des Jahres 2005 stellen sich dabei insofern als weniger instruktiv heraus, als (wie schon in Abschnitt 3.1 dargestellt) alle Verfahren bis auf einen Sitz zum gleichen Ergebnis führen. Schon die Wahlen davor zeigen jedoch größere Abweichungen^{29,30}.

9.1. Berechnungsbeispiele für ausgewählte Bundestagswahlen

Die folgenden Ergebnisse wurden mit Hilfe der Software „BAZI“³¹ (vgl. Maier/Pukelsheim 2007) berechnet. Sie beschränken sich auf die Oberverteilung als erstem Schritt der zweistufigen Zuteilung nach dem Bundeswahlgesetz. Der zweite Schritt – die Unterverteilung, bei der Parteisitze auf Bundesländer bzw. Landeslisten verteilt werden – ist zwar nicht weniger wichtig, auch weil dabei Überhangmandate entstehen können, die die Gesamtzusammensetzung des Parlaments nochmals verändern. Von der Unterverteilung sind allerdings wesentlich mehr Beteiligte betroffen: In der Frühzeit der Bundesrepublik je 11 Landesverbände von 3-4 Parteien, heute je 16 Landesverbände von 5-6 Parteien. Die zugehörige Zahlenfülle würde den vorhandenen Platz sprengen, daher beschränkt sich die vorliegende Darstellung auf die Oberverteilung. Wichtig zu bemerken bleibt, dass die Rechenergebnisse insofern von tatsächlichen historischen Zuteilungen abweichen können, als Überhangmandate nicht berücksichtigt sind.

²⁹ Interessant wären zudem die Unterverteilungen, die hier aber aus Platzgründen nicht dargestellt werden können. Schließlich würden auch die Ausschussbesetzungen interessante Rechenbeispiele bieten, die hier im Sinne der Kürze ebenfalls unterschlagen werden müssen. Zumindest letztere werden jedoch von der Bundestagsverwaltung nach jeder Wahl für alle einschlägigen Ausschussgrößen durchgerechnet und im Internet veröffentlicht (<http://www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse/azur/>). Um dabei die Effekte der drei bekanntesten Verfahren zu vergleichen, steht zudem ein interaktives Computerprogramm im Intranet des Bundestages bereit.

³⁰ vgl. <http://azur.server.btg:8080/AZUR/azur>

³¹ Programm im Internet kostenlos verfügbar, vgl. <http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/bazi/>

Partei	Zweitstimmen auf Bundesebene	Anteil	Idealanspruch	Hare/Niemeyer	D'Hondt	Sainte-Laguë/Schepers	Adams	Hill	Dean
SPD	18.488.668	41,44%	246,95	247	247	247	246	247	247
CDU	14.167.561	31,75%	189,24	189	190	189	189	189	189
CSU	4.315.080	9,67%	57,64	58	57	58	58	58	58
Grüne	4.110.355	9,21%	54,90	55	55	55	55	55	55
FDP	3.538.815	7,93%	47,27	47	47	47	48	47	47
Summe	44.620.479	100,00%	596,00	596	596	596	596	596	596

Sitzzahl nach BWahlG: 596 (=598 minus 2 PDS-Direktmandate)

Tabelle 9: Sitzuteilungsvarianten, Beispiel Bundestagswahl 2002. D'Hondt führt zur Umverteilung eines Sitzes von einer kleinen zu einer großen Partei, Adams bewirkt umgekehrt eine Umverteilung von großer zu kleiner Partei. Fast identische Effekte traten 1994 und 1969 auf.

In den Tabellen gilt für die Formatierung: Blau markiert sind Unterschiede im Vergleich zum (aktuell gültigen) Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers als Referenz. Das tatsächlich genutzte Verfahren ist durch separate Umrandung hervorgehoben. Quotenverletzungen sind durch Fettdruck der Sitzzahl kenntlich gemacht.

Partei	Zweitstimmen auf Bundesebene	Anteil	Idealanspruch	Hare/Niemeyer	D'Hondt	Sainte-Laguë/Schepers	Adams	Hill	Dean
CDU	17.055.116	39,93%	261,92	262	263	262	261	262	262
SPD	15.545.366	36,39%	238,74	239	239	238	238	238	238
FDP	5.123.233	11,99%	78,68	79	79	79	79	79	79
CSU	3.302.980	7,73%	50,73	51	50	51	51	51	51
PDS	1.129.578	2,64%	17,35	17	17	17	18	17	17
Grüne	559.207	1,31%	8,59	8	8	9	9	9	9
Summe	42.715.480	100,00%	656,00	656	656	656	656	656	656

Sitzzahl nach BWahlG: 656

Tabelle 10: Sitzuteilungsvarianten, Beispiel Bundestagswahl 1990. Auch hier führt das Verfahren von Adams zu einer Umverteilung von groß zu klein, das von D'Hondt hingegen zu einer (doppelten) Umverteilung von klein zu groß. Auch das Verfahren nach Hare/Niemeyer bewirkt hier die Verschiebung eines Sitzes von Bündnis 90/Die Grünen zur SPD. Bei D'Hondt tritt eine Quotenverletzung nach oben auf: Die CDU erhält einen Sitz mehr als ihren aufgerundeten Idealanspruch.

Partei	Zweitstimmen auf Bundesebene	Anteil	Idealanspruch	Hare/Niemeyer	D'Hondt	Sainte-Laguë/Schepers	Adams	Hill	Dean
SPD	16099019	42,94%	212,9994	213	214	213	212	213	213
CDU	14367302	38,32%	190,09	190	190	190	190	190	190
CSU	4027499	10,74%	53,29	53	53	53	54	53	53
FDP	2995085	7,99%	39,63	40	39	40	40	40	40
Summe	37.488.905	100,00%	496,00	496	496	496	496	496	496

Sitzzahl nach BWahlG: 496

Tabelle 11: Sitzzuteilungsvarianten, Beispiel Bundestagswahl 1976. Ähnlich wie 2002 bewirken die Verfahren nach Adams und D'Hondt Sitzverschiebungen zwischen den (hier nur vier) Parteien, allerdings ist davon in beiden Fällen die SPD als große Partei betroffen. Wieder tritt bei D'Hondt eine (knappe) Quotenverletzung nach oben auf: Hier erhält die SPD einen Sitz mehr als ihren aufgerundeten Idealanspruch.

Partei	Zweitstimmen auf Bundesebene	Anteil	Idealanspruch	Hare/Niemeyer	D'Hondt	Sainte-Laguë/Schepers	Adams	Hill	Dean
SPD	12813186	40,76%	202,18	202	202	202	202	202	202
CDU	12387562	39,41%	195,46	195	196	195	195	195	195
CSU	3136506	9,98%	49,49	50	49	50	50	50	50
FDP	3096739	9,85%	48,86	49	49	49	49	49	49
Summe	31.433.993	100,00%	496,00	496	496	496	496	496	496

Sitzzahl nach BWahlG: 496

Tabelle 12: Sitzzuteilungsvarianten, Beispiel Bundestagswahl 1965. Die Verteilungen nach allen Verfahren sind gleich, mit Ausnahme des Verfahrens von D'Hondt, das einen Sitz von der CSU zur CDU verschiebt.

9.2. Weitere Beobachtungen aus Berechnungen für alle Bundestagswahlen

Erst seit der Bundestagswahl im Jahr 1957 ist das Wahlsystem im Wesentlichen mit dem heutigen vergleichbar. Insbesondere wurde das zweistufige Sitzzuteilungsverfahren mit verbundenen Landeslisten erst zur dritten Bundestagswahl eingeführt. Daher erstrecken sich die folgenden Aussagen und Vergleiche nur auf die Wahlen ab 1957, nicht jedoch auf die vorhergehenden in den Jahren 1949 und 1953.

9.2.1. Sitzverschiebungen

Berechnet man aus allen bekannten Stimmenergebnissen seit 1957 die rechnerischen Verteilungsergebnisse der Verfahren nach **Sainte-Laguë/Schepers**, nach **Dean** und nach **Hill-Huntington** (das aktuell in den USA verwendete Verfahren), so unterscheiden sich die Ergebnisse dieser drei Verfahren in keinem einzigen Fall. Trotz der Nuancen in den theoretischen Verfahren führen die konkreten Wahlergebnisse seit 1957 also immer zu drei identischen Sitzzuteilungen. Damit können die drei Verfahren hier zumindest als sehr ähnlich, wenn auch nicht als vollständig austauschbar gelten.

Zwischen den beiden Verfahren **Hare/Niemeyer** und **Sainte-Laguë/Schepers** ist allein 1990 ein Sitz Unterschied (Verschiebung zwischen Bündnis 90/Grünen und SPD) aufgetreten. Sonst sind auch alle Ergebnisse dieser beiden Verfahren seit 1957 identisch.

Das Zuteilungsergebnis nach dem Verfahren von **D'Hondt** hingegen unterscheidet sich mit Ausnahme von 1961 bei allen Bundestags-Wahlen von den Ergebnissen aller anderen Verfahren. In fast allen Fällen hätten hier SPD und/oder CDU als große Parteien einen zusätzlichen Sitz zugeteilt bekommen; dieser Zugewinn wäre in wechselnder Folge zu Lasten aller kleinen Parteien (FDP, Bündnis 90/Die Grünen, PDS/Die Linke und auch CSU) gegangen. In vielen dieser Fälle wäre die „politische“ Bedeutung solcher Verschiebungen, zumindest soweit die Chancen auf Bildung einer Koalitionsregierung betroffen sind, gering geblieben: 2005 wäre der Gewinn eines Sitzes bei der SPD zu Lasten der Grünen ausgefallen. 2002 und 1994 wäre ein Zugewinn der CDU durch einen Sitzverlust bei der CSU kompensiert worden. 1987 hätten CDU und SPD jeweils einen Sitz Vorteil zu Lasten von FDP und Grünen erzielt. Diese Fälle bleiben insofern hypothetisch, als in den Jahren ab 1987 das Verfahren nach D'Hondt nicht mehr zur Anwendung kam. Bei der Wahl 1983, bei der D'Hondt zuletzt für die Oberverteilung eingesetzt wurde, führte das Verfahren jedoch tatsächlich dazu, dass CDU und SPD je einen Sitz von FDP und Grünen übernahmen (im Vergleich zu allen anderen Verfahren). 1976 wiederum erzielte die SPD einen Sitz Vorsprung zum Nachteil der FDP – ihrem damaligen Koalitionspartner. 1969 und 1965 stellte

sich der Fall konkret ein, der auch 1994 und 2002 rechnerisch eingetreten wäre: die CDU übernahm aufgrund des Verfahrens nach D'Hondt einen Sitz von der CSU (im Vergleich zu allen anderen Verfahren). Dasselbe geschah auch 1957, wobei zusätzlich ein Sitz von der (damals in Bundestag und Bundesregierung vertretenen) Deutschen Partei weg und zur SPD hin wanderte.

9.2.2. Verletzungen der Quotenbedingung

Interessant sind zudem Fälle von Verletzung der Quotenbedingung. In mehreren Einzelfällen kam es vor, dass die konkrete Sitzzuteilung einer Partei weder dem auf die nächst höhere ganze Zahl aufgerundeten noch dem auf die nächst niedrigere ganze Zahl abgerundeten Idealanspruch entsprach, sondern sich um mehr als einen ganzen Sitz davon unterschied. Bei 14 Wahlen seit 1957 und allen hier zur Berechnung herangezogenen Zuteilungsverfahren sind insgesamt nur sechs Fälle von Quotenverletzungen erkennbar. So hätte 1998 das D'Hondtsche Verfahren der CDU 199 Sitze zugeteilt, bei einem Idealanspruch von 197,96 Mandaten; ebenso hätte die CDU 1990 263 Sitze erhalten, bei einem Idealanspruch von 261,92. Beide Fälle traten jedoch in der Praxis nicht ein, da das Verfahren nach Hare/Niemeyer verwendet wurde. Die SPD dagegen hat 1976 tatsächlich 214 Sitze nach D'Hondt erhalten, obwohl ihr Idealanspruch bei 212,9994 lag. Ebenso hat 1957 die CDU 212 Sitze trotz eines Idealanspruchs von 210,88 erhalten.

Die Quote wird also durch das Verfahren nach D'Hondt, wie aus der Theorie zu erwarten, allenfalls nach oben verletzt. Zwei weitere Fälle von Quotenverletzungen wären theoretisch beim Verfahren nach Adams aufgetreten. Auch diese entsprechen der Theorie, gehen also nach unten. Das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers, das laut Theorie die geringstmögliche Quotenverletzung unter den Divisorverfahren nach sich zieht, weist in der Praxis der Bundestagswahlen bisher gar keine Quotenverletzung auf.

10. Quellen und weiterführende Literatur

- Balinski, Michel L.; Young, H. P. (1982). *Fair representation: Meeting the ideal of one man, one vote*. New Haven: Yale University Press.
- Balinski, Michel (2004). Die Mathematik der Gerechtigkeit. *Spektrum der Wissenschaft* 3/2004, S. 90. Im Internet: http://www.spektrum.de/artikel/840305&_z=798888.
- Balinski, Michel; Pukelsheim, Friedrich (2007). Die Mathematik der doppelten Gerechtigkeit. *Spektrum der Wissenschaft*, 4/2007, S. 76-80.
- Behnke, Joachim (2007). *Das Wahlsystem der Bundesrepublik Deutschland: Logik, Technik und Praxis der Verhältniswahl*. Baden-Baden: Nomos.
- Bundeswahlleiter (2008). Neues Sitzzuteilungsverfahren bei Bundestagswahl und Europawahl. Autorin: Christiane Egert-Wiensch. Im Internet: http://www.bundeswahlleiter.de/de/aktuelle_mitteilungen/downloads/Kurzdarst_Sitzzuteilung.pdf.
- Deutscher Bundestag (2008). Berechnungsverfahren für die Sitzverteilung. Im Internet: <http://www.bundestag.de/ausschuesse/azur/index.html>.
- Fehndrich, Martin (1999). Paradoxien des Bundestags-Wahlsystems. *Spektrum der Wissenschaft*, 2/1999, S. 70-73.
- Feldkamp, Michael; Ströbel, Birgit (2005). *Datenhandbuch zur Geschichte des Deutschen Bundestages 1994 bis 2003*. Berlin: Deutscher Bundestag.
- Hermsdorf, Fred (1996). Mehrheitstreue und Proportionalität: Zur Berechnung von Sitzverteilungen in Parlamenten. *Zeitschrift für Parlamentsfragen* 1/1996, S. 5-12.
- Hermsdorf, Fred (2009). Demokratieprinzip versus Erfolgswertgleichheit: Verfahren der Mehrheitstreue bei Parlamentswahlen. *Zeitschrift für Parlamentsfragen* 1/2009, S. 86 – 95.
- Kopfermann, Klaus (1991). *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren. Mandatsverteilung bei Abstimmungen*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Lübbert, Daniel (2009). Negative Stimmgewichte und die Reform des Bundestags-Wahlrechts. Infobrief der Wissenschaftlichen Dienste des Deutschen Bundestages. Im Internet: www.bundestag.de/wissen/analysen/2009/negative_stimmgewichte.pdf.
- Maier, Sebastian; Pukelsheim, Friedrich (2007). Bazi: A Free Computer Program for Proportional Representation Apportionment. Preprint Nr. 042/2007, Universität Augsburg.
- Mausberg, Wolfgang (1995). Anteile, Zugriffe und Reihenfolgen (AZUR). Berechnungsverfahren für Sitzverteilungen und Reihenfolgen. Deutscher Bundestag, Arbeitspapier ZI 5 – 1995/003. Im Internet: http://www.bundestag.de/ausschuesse/azur/azur_ref.pdf.
- Nurmi, Hannu (1999). *Voting Paradoxes – and how to deal with them*. Berlin: Springer.
- Pukelsheim, Friedrich (2009). Stellungnahme anlässlich der Anhörung des Innenausschusses des Deutschen Bundestages am 4. Mai 2009. Im Internet: http://www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse/a04/anhoerungen/Anhoerung_20/Stellungnahmen_SV/Stellungnahme_01.pdf.
- Saari, Donald (2001). *Decisions and elections: explaining the unexpected*. Cambridge University Press.
- Zicht, Wilko (2009). Stellungnahme anlässlich der Anhörung des Innenausschusses des Deutschen Bundestages am 4. Mai 2009. Im Internet: http://www.bundestag.de/bundestag/ausschuesse/a04/anhoerungen/Anhoerung_20/Stellungnahmen_SV/Stellungnahme_05.pdf.